UNIV. OF
TORONTO
LIBRARY

Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of Ottawa

http://www.archive.org/details/s7journaldemat02liou

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES,

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1847

PAR JOSEPH LIOUVILLE.

PUBLIÉ DE 1875 A 1884

PAR H. RESAL.

SEPTIÈME SÉRIE,

PUBLIÉE

PAR CAMILLE JORDAN,

AVEC LA COLLABORATION DE

G. HUMBERT, E. PICARD.

TOME DEUXIÈME. — ANNÉE 1916.

(81e Volume de la Collection.)

145360
6/3/18

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1916

GN
1
J684
Ser. 6
E. 2

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Sur quelques nouvelles figures d'équilibre d'une masse fluide en rotation;

PAR B. GLOBA-MIKHAÏLENKO.

INTRODUCTION.

Dans le présent Mémoire j'étudie les figures d'équilibre relatif qu'affecte une masse fluide homogène, tournant autour d'un axe fixe avec une vitesse angulaire constante. Je considère successivement trois cas relativement aux forces extérieures agissant sur la masse fluide. D'où la division de ce Mémoire en trois Parties :

Dans la première Partie, je suppose que le fluide est assujetti aux seules forces newtoniennes; dans la seconde Partie, aux forces newtoniennes plus une faible pression capillaire et enfin, dans la troisième Partie, je suppose que les seules forces qui agissent sur le fluide sont les forces capillaires.

Le cas du fluide soumis aux seules forces newtoniennes est déjà classique. Les principaux fondements ont été donnés par Mac Laurin et Jacobi qui ont donné les figures ellipsoïdales, et par Poincaré et M. Liapounoff qui ont découvert une infinité de nouvelles figures

d'équilibre infiniment voisines d'un ellipsoïde. Pour compléter cette étude, je me propose de rechercher par les mêmes méthodes les figures d'équilibre infiniment voisines d'un cylindre elliptique indéfini.

J'admets que le mouvement du fluide est de telle nature que chaque filet fluide, parallèle à l'axe de rotation, lui reste toujours parallèle; donc il me suffit, pour déterminer la figure cylindrique, de considérer n'importe laquelle de ses sections droites. Si je prends le plan de la section choisie pour plan des coordonnées, je ramène le problème au cas de deux coordonnées dans le plan. C'est pourquoi je commence par donner la notion des fonctions de deux variables, analogues aux fonctions de Lamé dans l'espace. Par analogie, j'appellerai ces nouvelles fonctions *fonctions de Lamé dans le plan*.

Je retrouve ainsi, en les rattachant aux travaux de Poincaré et de M. Liapounoff, les résultats obtenus par M. J.-H. Jeans (*Philosophical Transactions of the royal Society*, A, vol. CC, 1903, p. 67-104).

Dans la seconde Partie de ce Mémoire, j'étudie les figures d'équilibre d'une masse liquide en rotation, assujettie non seulement aux forces newtoniennes, mais encore aux forces capillaires qui produisent une faible pression superficielle, proportionnelle à la courbure moyenne de la surface.

Comme je l'ai démontré dans une Note, présentée à l'Académie des Sciences de Paris (13 février 1915), les figures ellipsoïdales d'équilibre sont impossibles dans ces conditions. Mais je chercherai à déterminer dans quel sens la pression capillaire tendra à modifier les figures ellipsoïdales que le liquide aurait affectées sans elle, et je démontrerai que la pression capillaire tend à arrondir toutes les figures ellipsoïdales.

Dans la troisième et dernière Partie, je considère une masse liquide soumise aux seules forces capillaires. Ce cas est tout à fait conforme à la réalité, car un tel liquide a été déjà réalisé par Plateau, qui a démontré en outre que dans ces conditions le liquide en repos affecte la figure sphérique ou une figure limitée par une portion d'une des surfaces indéfinies : cylindre, onduloïde, nodoïde, caténoïde. Je fais, pour ainsi dire, tourner ces figures autour de leur axe et j'obtiens chaque fois une série de nouvelles figures qui, pour une vitesse angulaire assez grande, donnent toujours naissance à un anneau.

Je dois maintenant exprimer ici tous les sentiments de gratitude et de reconnaissance les plus sincères à mon cher maître M. Paul Appell, Doyen à la Faculté des Sciences, qui, depuis mon arrivée à Paris, n'a jamais cessé de me témoigner sa bienveillance et son intérêt, et qui, par ses précieux conseils, m'a toujours guidé dans mes études et mes recherches.

PREMIÈRE PARTIE.

I. — Fonctions de Lamé dans le plan.

1° *L'équation de Laplace en coordonnées elliptiques.* — Considérons l'équation de Laplace

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

et proposons-nous de l'écrire en coordonnées curvilignes ξ, η liées aux précédentes par les formules

$$x = f_1(\xi, \eta); \qquad y = f_2(\xi, \eta).$$

En admettant que le nouveau système est orthogonal, nous avons

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = \alpha^2 d\xi^2 + \beta^2 d\eta^2,$$

α et β étant certaines fonctions de ξ et η.

Dans ces conditions

$$\Delta_2 V = -\frac{1}{\alpha\beta}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\beta}{\alpha}\frac{\partial V}{\partial\xi}\right) + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\alpha}{\beta}\frac{\partial V}{\partial\eta}\right)\right]$$

et l'équation de Laplace devient

$$(1) \qquad \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\beta}{\alpha}\frac{\partial V}{\partial\xi}\right) + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\alpha}{\beta}\frac{\partial V}{\partial\eta}\right) = 0.$$

Écrivons maintenant cette équation en coordonnées elliptiques.

Prenons pour ces coordonnées les racines positives ρ et μ de l'équation

$$\frac{x^2}{\lambda^2 - a^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - b^2} - 1 = 0 \qquad (\infty > \rho^2 > a^2 > \mu^2 > b^2).$$

Alors ρ^2 correspond à une ellipse et μ^2 à une hyperbole. L'identité fondamentale

$$(2) \qquad \frac{x^2}{\lambda^2 - a^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - b^2} - 1 = -\frac{(\rho^2 - \lambda^2)(\mu^2 - \lambda^2)}{(\lambda^2 - a^2)(\lambda^2 - b^2)}$$

nous donne les formules de transformation

$$(3) \qquad x^2 = \frac{(\rho^2 - a^2)(a^2 - \mu^2)}{a^2 - b^2}; \qquad y^2 = \frac{(\rho^2 - b^2)(\mu^2 - b^2)}{a^2 - b^2}.$$

On en déduit par un calcul classique

$$ds^2 = \alpha^2\, d\rho^2 + \beta^2\, d\mu^2$$

en prenant

$$(4) \qquad \begin{cases} \alpha^2 = \dfrac{\rho^2}{(\rho^2 - a^2)(\rho^2 - b^2)}(\rho^2 - \mu^2) = \dfrac{1}{A^2}(\rho^2 - \mu^2), \\ \beta^2 = \dfrac{\mu^2}{(a^2 - \mu^2)(\mu^2 - b^2)}(\rho^2 - \mu^2) = \dfrac{1}{B^2}(\rho^2 - \mu^2), \end{cases}$$

où l'on pose pour abréger

$$(5) \qquad A^2 = \frac{(\rho^2 - a^2)(\rho^2 - b^2)}{\rho^2}; \qquad B^2 = \frac{(a^2 - \mu^2)(\mu^2 - b^2)}{\mu^2}.$$

En portant ces valeurs dans la formule (1), et en multipliant par AB, nous aurons l'équation de Laplace en coordonnées elliptiques

$$(6) \qquad A\frac{\partial}{\partial \rho}\left[A\frac{\partial V}{\partial \rho}\right] + B\frac{\partial}{\partial \mu}\left[B\frac{\partial V}{\partial \mu}\right] = 0.$$

Faisons encore un changement de variables qui s'impose : posons

$$(7) \qquad \begin{cases} du = \dfrac{d\rho}{A} = \dfrac{\rho\, d\rho}{\sqrt{(\rho^2 - a^2)(\rho^2 - b^2)}}, \\ dv = \dfrac{d\mu}{B} = \dfrac{\mu\, d\mu}{\sqrt{(a^2 - \mu^2)(\mu^2 - b^2)}}, \end{cases}$$

ce qui donne

$$(8)\quad \begin{cases} u = \displaystyle\int_a^\rho \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{(\rho^2-a^2)(\rho^2-b^2)}} = \log\left[\frac{\sqrt{\rho^2-a^2}+\sqrt{\rho^2-b^2}}{\sqrt{a^2-b^2}}\right], \\ v = \displaystyle\int_a^\mu \frac{\mu\, d\mu}{\sqrt{(a^2-\mu^2)(\mu^2-b^2)}} = \frac{1}{2}\arccos\left[\frac{2\mu^2-a^2-b^2}{a^2-b^2}\right]. \end{cases}$$

Et l'équation de Laplace devient

$$(9)\qquad \frac{\partial^2 V}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} = 0.$$

2° *Polynomes harmoniques en x, y en coordonnées elliptiques.* — Tout polynome harmonique en x, y peut être présenté comme somme des polynomes suivants :

$$Q(x^2, y^2);\quad xQ(x^2, y^2);\quad yQ(x^2, y^2);\quad xyQ(x^2, y^2),$$

$Q(x^2, y^2)$ étant un polynome en x^2, y^2, symétrique par rapport à x^2 et y^2.

En coordonnées elliptiques, ces quatre polynomes ont des analogues

$$(10)\quad \begin{cases} \text{I} \quad Q(x^2, y^2) = f(\rho^2) f(\mu^2), \\ \text{II} \begin{cases} xQ(x^2, y^2) = \sqrt{\rho^2-a^2}\sqrt{a^2-\mu^2}\, f(\rho^2) f(\mu^2), \\ yQ(x^2, y^2) = \sqrt{\rho^2-b^2}\sqrt{\mu^2-b^2}\, f(\rho^2) f(\mu^2), \end{cases} \\ \text{III} \quad xyQ(x^2, y^2) = \sqrt{\rho^2-a^2}\sqrt{\rho^2-b^2}\sqrt{a^2-\mu^2}\sqrt{\mu^2-b^2}\, f(\rho^2) f(\mu^2), \end{cases}$$

$f(\rho^2)$ étant un polynome en ρ^2 et $f(\mu^2)$ le même polynome où l'on change ρ^2 en μ^2.

En effet, soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ les racines du polynome $f(\rho^2)$; alors, d'après l'identité (2), nous aurons

$$f(\rho^2) f(\mu^2) = \text{const.} \prod_i (\rho^2-\alpha_i)(\mu^2-\alpha_i) = \text{const.} \prod_i \left(\frac{x^2}{\alpha_i-a^2} + \frac{y^2}{\alpha_i-b^2} - 1\right).$$

De même, on vérifiera les autres formules. Les formules I et III donnent des polynomes de degré pair, et les formules II des polynomes de degré impair. Ainsi, pour chaque degré, nous aurons deux polynomes types.

3° *Équations analogues à celles de Lamé.* — Cherchons la solution des équations (6) et (9) sous la forme de produit d'une fonction R de ρ par une fonction M de μ,

$$V = RM.$$

La substitution donne pour l'équation (6)

$$\frac{A}{R}\frac{d}{d\rho}\left(A\frac{dR}{d\rho}\right) + \frac{B}{M}\frac{d}{d\mu}\left(B\frac{\partial M}{\partial \mu}\right) = 0 \tag{11}$$

et pour l'équation (9)

$$\frac{1}{R}\frac{d^2R}{du^2} + \frac{1}{M}\frac{d^2M}{d\varphi^2} = 0. \tag{12}$$

Et les équations pour déterminer R et M (analogues à celles de Lamé) sont

$$\left\{\begin{aligned} &A\frac{d}{d\rho}\left(A\frac{dR}{d\rho}\right) = H^2R,\\ &B\frac{d}{d\mu}\left(B\frac{dM}{d\mu}\right) = -H^2M \end{aligned}\right. \tag{13}$$

et avec les variables u et φ

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d^2R}{du^2} = H^2R,\\ &\frac{d^2M}{d\varphi^2} = -H^2M, \end{aligned}\right. \tag{14}$$

H^2 étant une constante arbitraire, qu'il faut spécifier, si nous voulons donner à R et M une forme spéciale.

4° *Solutions de l'équation de Laplace en forme des polynomes types, donnés par la formule* (10). — L'intégrale générale de la première des équations (14) est

$$R = Ce^{Hu} + C'e^{-Hu}. \tag{15}$$

Mais, d'après la formule (8), nous avons

$$\frac{\sqrt{\rho^2 - b^2} + \sqrt{\rho^2 - a^2}}{\sqrt{a^2 - b^2}} = e^u,$$

d'où l'on tire

$$\frac{\sqrt{\rho^2-b^2}-\sqrt{\rho^2-a^2}}{\sqrt{a^2-b^2}}=e^{-u}$$

et l'intégrale (15) devient

$$R=C_1\left[\sqrt{\rho^2-b^2}+\sqrt{\rho^2-a^2}\right]^H+C_2\left[\sqrt{\rho^2-b^2}-\sqrt{\rho^2-a^2}\right]^H,$$

C_1 et C_2 étant des nouvelles constantes.

On voit maintenant que, pour que R soit un polynome de degré n en ρ (en considérant $\sqrt{\rho^2-a^2}$ et $\sqrt{\rho^2-b^2}$ comme de degré 1 en ρ), il faut et il suffit que

$$H=n.$$

Il est aisé de vérifier que, pour avoir R de la forme

$$R=f(\rho^2) \qquad \text{ou} \qquad R=\sqrt{\rho^2-b^2}f(\rho^2),$$

il faut poser $C_1=C_2$ et pour avoir R de la forme

$$R=\sqrt{\rho^2-a^2}f(\rho^2) \qquad \text{ou} \qquad R=\sqrt{\rho^2-a^2}\sqrt{\rho^2-b^2}f(\rho^2),$$

il faut poser $C_1=-C_2$. Pour avoir le coefficient 1 devant ρ^n, il faut toujours prendre $C_1=|C_2|=2^{-n}$.

Ainsi la formule générale s'écrit :

$$(16) \qquad R=2^{-n}\left[\left(\sqrt{\rho^2-b^2}+\sqrt{\rho^2-a^2}\right)^n\pm\left(\sqrt{\rho^2-b^2}-\sqrt{\rho^2-a^2}\right)^n\right].$$

A l'aide de la variable u, cette formule s'écrit :

$$(17) \qquad R=\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{2}\right)^n(e^{nu}\pm e^{-nu}).$$

Passons aux fonctions M. L'intégrale générale de la seconde équation (14) est

$$M=C_1'\cos(Hv)+C_2'\sin(Hv).$$

Or pour H pair

$$\cos(Hv)=f(\cos^2 v), \qquad \sin(Hv)=\sin v\cos v f(\cos^2 v)$$

et pour H impair

$$\cos(Hv)=\cos v f(\cos^2 v) \qquad \text{et} \qquad \sin(Hv)=\sin v f(\cos^2 v),$$

$f(\cos^2 v)$ étant un polynome en $\cos^2 v$. Quant à la variable v la formule (8) nous donne

$$\cos 2v = \cos^2 v - \sin^2 v = \left(\frac{\sqrt{\mu^2 - b^2}}{\sqrt{a^2 - b^2}}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{a^2 - \mu^2}}{\sqrt{a^2 - b^2}}\right)^2,$$

d'où l'on tire

$$(18) \qquad \cos v = \frac{\sqrt{\mu^2 - b^2}}{\sqrt{a^2 - b^2}}; \qquad \sin v = \frac{\sqrt{a^2 - \mu^2}}{\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

Par conséquent, pour avoir M en forme de polynome en μ de degré n, il faut poser $H = n$. Pour avoir

$$M = f(\mu^2) \qquad \text{ou} \qquad M = \sqrt{\mu^2 - b^2} f(\mu^2),$$

il faut poser $C'_2 = 0$, et pour avoir

$$M = \sqrt{a^2 - \mu^2} f(\mu^2) \qquad \text{ou} \qquad M = \sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{a^2 - \mu^2} f(\mu^2),$$

il faut poser $C'_1 = 0$.

Ainsi, pour chaque degré n, nous avons deux fonctions R et deux fonctions M correspondantes. Par conséquent, nous aurons deux produits RM. Ces produits sont des fonctions harmoniques symétriques par rapport à ρ et μ et représentent les polynomes types [formules (10)] en x, y.

5° *Développement en série :*

Théorème. — *Toute fonction qui, sur un cercle, peut être développée en une série trigonométrique, peut être développée sur une ellipse en une série de fonctions* M.

La fonction M est analogue aux fonctions trigonométriques sin et cos. En effet, faisons la transformation changeant l'ellipse en cercle : $x = \sqrt{\rho^2 - a^2} x_1$; $y = \sqrt{\rho^2 - b^2} y_1$. Alors, désignant par θ l'angle polaire, nous aurons

$$x_1 = \cos\theta = \frac{\sqrt{a^2 - \mu^2}}{\sqrt{a^2 - b^2}} = \sin v,$$

$$y_1 = \sin\theta = \frac{\sqrt{\mu^2 - b^2}}{\sqrt{a^2 - b^2}} = \cos v,$$

ce qui montre que $v = \frac{\pi}{2} - \theta$ est l'angle compris entre l'axe Oy et le rayon vecteur, compté dans le sens négatif.

Par conséquent

$$M_n = C_1 \cos nv + C_2 \sin nv = C' \cos n\theta + C'' \sin n\theta$$

est une fonction trigonométrique d'ordre n sur le cercle, étant en même temps une fonction de Lamé du même ordre sur l'ellipse. Or, sur l'ellipse, ρ étant donné, un point se détermine par la valeur de μ; par conséquent, toute fonction, donnée sur l'ellipse, est fonction de μ seul. Mais μ, étant une fonction de v et par conséquent de θ, toute fonction de μ, sur une ellipse, peut être représentée comme une fonction de θ sur un cercle. Et si elle est développable en une série trigonométrique sur un cercle, nous n'avons qu'à faire la transformation inverse (transformant le cercle en ellipse) pour voir que cette fonction sera développable sur cette ellipse en une série des fonctions M.

C. Q. F. D.

Ainsi toute fonction de μ seul, vérifiant de très larges conditions de développabilité en une série trigonométrique, peut être développée en la série suivante :

$$f(\mu) = \lambda_0 M_0 + \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 + \ldots + \lambda_n M_n + \ldots \tag{19}$$

Les coefficients de ce développement se calculent comme les coefficients de la série de Fourier, ce qui s'ensuit du théorème suivant :

Théorème. — *Si* M *et* M' *sont deux fonctions de Lamé distinctes, l'intégrale suivante est nulle*

$$\int_E l_0 M M' \, ds = 0,$$

où l'on pose

$$l = \frac{1}{\sqrt{\rho^2 - \mu^2}}$$

et où l'intégration est faite le long de l'ellipse.

Appliquons la formule de Green aux fonctions $U = RM$ et $U' = R'M'$

$$\int\int_E (U \Delta U' - U' \Delta U) \, d\sigma = \int_E \left(U \frac{\partial U'}{\partial n} - U' \frac{\partial U}{\partial n} \right) ds.$$

Mais comme $dn = \alpha\, d\rho$, on a

$$\frac{dU}{dn} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial U}{\partial \rho} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial U}{\partial u}\frac{du}{d\rho} = \frac{\partial U}{\partial u}\, l = lM\frac{dR}{d\rho},$$

de même

$$\frac{dU'}{dn} = lM\frac{dR'}{d\rho}$$

et la formule de Green donne

$$\int_E \left(l_0 MRM'\frac{dR'}{d\rho} - l_0 M'R'M\frac{dR}{d\rho}\right) ds = \left(R\frac{dR'}{d\rho} - R'\frac{dR}{d\rho}\right)\int_E l_0 MM'\, ds = 0.$$

Par conséquent, si M et M′ sont distincts, R et R′ le sont aussi, et nous aurons

$$\int_E l_0 MM' ds = 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Ainsi, pour avoir le coefficient λ_n du développement (19), il suffit de multiplier tous ses termes par $l_0 M_n\, ds$ et intégrer le long de l'ellipse : ce qui nous donnera la formule

$$\lambda_n = \frac{\int_E l_0 M_n f(\mu)\, ds}{\int_E l_0 M_n^2\, ds}. \tag{20}$$

Calculant

$$ds = \beta\, d\mu = \frac{d\mu}{l_0 B},$$

nous verrons que les deux intégrales de la dernière formule sont indépendantes de ρ, ce qui montre que le développement en série (19) est indépendant de l'ellipse E.

Si $f(\mu)$ est un polynome de degré n, tous les coefficients $\lambda_k (k > n)$ sont nuls et nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Si $\Phi(\mu)$ est un polynome, et si le degré de M est supérieur au degré de $\Phi(\mu)$, l'intégrale*

$$\int_E l_0\, \Phi(\mu)\, M\, ds = 0. \tag{21}$$

6° *Racines de la fonction* R :

THÉORÈME. — *Toutes les racines des fonctions* R *sont réelles, distinctes et comprises entre a et b.*

Il est facile de voir que si la fonction R a des racines imaginaires, multiples ou en dehors de (a, b), elle peut être décomposée en un produit de deux facteurs dont l'un conserve son signe dans l'intervalle (a, b). Montrons que c'est impossible. Soit

$$R = \varphi(\rho)\psi(\rho)$$

dont $\psi(\rho) > 0$ entre a et b. Alors, posant dans la formule (21)

$$M = \varphi(\mu)\psi(\mu) \qquad \text{et} \qquad \Phi(\mu) = \varphi(\mu),$$

nous aurons

$$\int_E l_0[\varphi(\mu)]^2\psi(\mu)\,ds = 0,$$

ce qui est manifestement impossible. Le théorème est ainsi démontré.

7° *Notations et formules.* — Pour $n = 0$, nous avons une fonction R et une fonction M.

Nous les désignerons par

$$R_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad M_0 = 1.$$

Pour $n = 1$, il y a deux fonctions R et deux fonctions M.

Désignons-les comme il suit :

$$R_1 = \sqrt{\rho^2 - a^2}, \qquad M_1 = \sqrt{a^2 - \mu^2} = \frac{1}{h}\sin\varphi,$$

$$R_2 = \sqrt{\rho^2 - b^2}, \qquad M_2 = \sqrt{\mu^2 - b^2} = \frac{1}{h}\cos\varphi.$$

Ainsi,

$$x = hR_1M_1; \qquad y = hR_2M_2,$$

où l'on pose

$$h = \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

Pour $n = 2$, nous aurons encore deux fonctions R et deux fonctions M :

$$R_3 = \sqrt{\rho^2 - a^2}\sqrt{\rho^2 - b^2}, \qquad M_3 = \sqrt{a^2 - \mu^2}\sqrt{\mu^2 - b^2} = \frac{1}{2h^2}\sin 2v,$$

$$R_4 = \rho^2 - \alpha_1, \qquad M_4 = \mu^2 - \alpha_1 \qquad = \frac{1}{2h^2}\cos 2v,$$

où α_1 est une constante, pour laquelle le produit $(\rho^2 - \alpha_1)(\mu^2 - \alpha_1)$ devient une fonction harmonique. C'est donc une racine de l'équation

$$\frac{1}{a^2 - \alpha} + \frac{1}{b^2 - \alpha_1} = 0, \qquad \alpha_1 = \frac{a^2 + b^2}{2}$$

et nous aurons

$$R_4 = \rho^2 - \frac{a^2 + b^2}{2}; \qquad M_4 = \mu^2 - \frac{a^2 + b^2}{2} = \frac{1}{2h^2}\cos 2v.$$

Et ainsi de suite. On a dans chaque degré n deux fonctions R que nous désignerons par R_{2n-1} et R_{2n}, suivant que la fonction R contient $\sqrt{\rho^2 - a^2}$ en facteur ou non. De même, pour la fonction M. Ainsi pour n pair,

$$R_{2n-1} = \sqrt{\rho^2 - a^2}\sqrt{\rho^2 - b^2}\, f(\rho^2), \qquad R_{2n} = f(\rho^2)$$

et pour n impair

$$R_{2n-1} = \sqrt{\rho^2 - a^2}\, f(\rho^2), \qquad R_{2n} = \sqrt{\rho^2 - b^2}\, f(\rho^2).$$

Pour les fonctions M, nous aurons la formule unique

$$M_{2n-1} = 2^{-(n-1)} h^{-n} \sin nv, \qquad M_{2n} = 2^{-(n-1)} h^{-n} \cos nv.$$

On en déduit immédiatement

$$R_3 = R_1 R_2, \qquad M_3 = M_1 M_2,$$
$$xy = h^2 R_3 M_3.$$

L'aire de l'ellipse

$$A = \pi\sqrt{\rho^2 - a^2}\sqrt{\rho^2 - b^2} = \pi R_1 R_2 = \pi R_3. \tag{22}$$

Cherchons les cosinus directeurs de la normale. La normale étant tangente à la courbe $\mu = \text{const.}$, nous avons $dn = \alpha\, d\rho$. Par conséquent,

$$\cos(n, x) = \frac{dx}{dn} = \frac{1}{\alpha}\frac{dx}{d\rho} = \frac{1}{\alpha} h M_1 \frac{dR_1}{d\rho} = \frac{h}{\alpha}\frac{\rho}{R_1} M_1 = h_1 M_1 \sqrt{\rho^2 - b^2}\, l$$

et finalement

$$\cos(n, x) = hl M_1 R_2; \tag{23}$$

de même

$$\cos(n, y) = hl M_2 R_1.$$

7° *Fonctions de Lamé de seconde espèce.* — Les fonctions R sont des intégrales particulières de l'équation (14)

$$\frac{d^2 R}{du^2} = H^2 R.$$

Désignons par S une autre solution de cette équation distincte de R. Alors S vérifiera la même équation

$$\frac{d^2 S}{du^2} = H^2 S.$$

Multipliant la première de ces équations par $-S$, la seconde par R et ajoutant, nous aurons

$$-S\frac{d^2 R}{du^2} + R\frac{d^2 S}{du^2} = 0.$$

Effectuant la première intégration et faisant la constante d'intégration égale à $-2n$, nous aurons

$$R\frac{dS}{du} - S\frac{dR}{du} = -2n. \tag{24}$$

D'où l'on tire S par une quadrature

$$S = R\int_{\infty}^{u} \frac{-2n}{R^2}\,du. \tag{25}$$

Nous appellerons cette fonction S, *fonction de Lamé de seconde espèce dans le plan.*

La fonction S vérifiant l'équation (14), le produit SM vérifie l'équation de Laplace. A chaque fonction R correspond une fonction S. Portant dans (25) la valeur de R [*voir* (17)], nous aurons

$$S = \left(\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{2}\right)^{-n} (e^{nu} \pm e^{-nu}) \int_{\infty}^{u} \frac{-2n\,du}{(e^{nu} \pm e^{-nu})^2},$$

n étant le degré de la fonction R. Effectuant l'intégration, on trouve

$$(26)\quad S_{2n-1}=S_{2n}=\left(\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\right)^n e^{-nu}=\left(\frac{2}{\sqrt{\rho^2-b^2}+\sqrt{\rho^2-a^2}}\right)^n=\left(\frac{2}{R_2+R_1}\right)^n.$$

Ainsi, à chacune des deux fonctions R_{2n-1} et R_{2n} de degré n correspond une seule fonction S_n. On voit facilement que S est toujours positive, décroissante lorsque ρ croît, et prenant pour $\rho^2=a^2(u=0)$ la valeur $S_n^0=\left(\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\right)^n$ et pour $\rho=\infty$ devenant nulle comme ρ^{-n}.

8° *Problème de Dirichlet pour l'ellipse. — Étant donnée la valeur d'une fonction harmonique sur l'ellipse, déterminer cette fonction soit à l'extérieur, soit à l'intérieur de cette ellipse.*

Appelons V_0 la valeur de la fonction sur l'ellipse E_0. Alors V_0 peut être développée, comme nous le savons, en une série de fonctions M,

$$V_0=\sum_0^\infty A_k M_k;$$

ce que nous pouvons écrire

$$V_0=\sum_0^\infty \alpha_k R_k^0 S_k^0 M_k,$$

en posant $A_k=\alpha_k R_k^0 S_k^0$.

La solution du problème sera alors :

Pour l'intérieur

$$V_i=\sum_0^\infty \alpha_k S_k^0 R_k M_k$$

et pour l'extérieur

$$V_e=\sum_0^\infty \alpha_k R_k^0 S_k M_k+\varphi,$$

φ étant une fonction harmonique s'annulant sur l'ellipse E_0 et prenant à l'infini la valeur donnée d'avance. Pour vérifier la solution il suffit de remarquer que les fonctions V_i et V_e prennent la valeur V_0 sur l'ellipse E_0 car $(R_k)_{\rho=\rho_0}=R_k^0$ et $(S_k)_{\rho=\rho_0}=S_k^0$ et que si V_0 est conver-

gente sur E_0 (pour $\rho = \rho_0$), V_i est convergente pour $\rho < \rho_0$ et V_e est convergente pour $\rho > \rho_0$, car $R_k < R_k^0$ pour $\rho < \rho_0$ et $S_k < S_k^0$ pour $\rho > \rho_0$.

Si V représente le potentiel logarithmique, la fonction φ est facile à déterminer, sachant que V à l'infini doit prendre la valeur

$$A \log \frac{1}{R} + \text{const.},$$

A étant la masse des surfaces attirantes et R la distance. Dans ce cas la fonction φ est

$$\varphi = -A(u - u_0) = A \log \left[\frac{\sqrt{\rho_0^2 - a^2} + \sqrt{\rho_0^2 - b^2}}{\sqrt{\rho^2 - a^2} + \sqrt{\rho^2 - b^2}} \right].$$

Pour le vérifier il suffit de remarquer que $u = u_0$ sur l'ellipse et qu'à l'infini φ devient $\varphi = -A \log R + \text{const.}$

9° *Potentiel logarithmique d'une bande elliptique.* — Nous appellerons *bande elliptique* ou *bande ajoutée à l'ellipse* E_0, la partie du plan comprise entre le périmètre de l'ellipse et une courbe quelconque, infiniment voisine à l'ellipse. Nous appellerons *largeur de la bande* la distance entre l'ellipse et la courbe suivant la normale à l'ellipse. Cela posé, proposons-nous de résoudre le problème suivant :

Étant donnée une fonction harmonique

$$V_0 = \sum_0^\infty \alpha_k S_k^0 R_k^0 M_k,$$

$$V_i = \sum_0^\infty \alpha_k S_k^0 R_k M_k,$$

$$V_e = \sum_0^\infty \alpha_k R_k^0 S_k M_k + \varphi,$$

trouver la bande elliptique infiniment mince, homogène et de densité 1 *qui ait la fonction* V *comme potentiel logarithmique. Désignant par* A *l'aire de la bande, on doit poser*

$$\varphi = -A(u - u_0).$$

(Nous supposons que le coefficient de l'attraction universelle $f = 1$.)

Soit ζ la largeur de la bande; nous pouvons, en négligeant l'effet de

cette largeur, considérer la bande comme une masse linéaire de densité ζ, répandue sur le périmètre de l'ellipse. D'autre part V étant le potentiel logarithmique, elle vérifie l'équation

$$\left(\frac{dV_e}{dn_e}\right)_0 + \left(\frac{dV_i}{dn_i}\right)_0 = -2\pi\zeta.$$

Mais

$$\left(\frac{dV_e}{dn_e}\right)_0 = \Sigma\alpha_k R_k^0 S_k'^0 M_k \frac{du}{dn_e} - A\frac{du}{dn_e} = \Sigma\alpha_k l_0 R_k^0 S_k'^0 M_k - A l_0,$$

de même

$$\left(\frac{dV_i}{dn_i}\right)_0 = \Sigma\alpha_k(-l_0) R_k'^0 S_k^0 M_k$$

et l'équation précédente s'écrit

$$\left(\frac{dV_e}{dn_e}\right)_0 + \left(\frac{dV_i}{dn_i}\right)_0 = \Sigma\alpha_k M_k(R_k^0 S_k'^0 - S_k^0 R_k'^0) l_0 - A l_0 = -2\pi\zeta$$

et finalement

$$\Sigma 2n\,\alpha_k M_k + A = 2\pi\frac{\zeta}{l_0}.$$

Or ζ étant une fonction de μ ainsi que l_0, la fonction $\frac{\zeta}{l_0}$ peut être développée en série des fonctions M et nous aurons

$$\frac{\zeta}{l_0} = \sum_0^\infty \beta_k M_k = \beta_0 + \sum_1^\infty \beta_k M_k.$$

La formule précédente deviendra

$$A + \sum_1^\infty \alpha_k 2n M_k = 2\pi\beta_0 + 2\pi\sum_1^\infty \beta_k M_k.$$

En égalant les coefficients, nous aurons la solution de notre problème :

$$\beta_0 = \frac{A}{2\pi}, \qquad \beta_k = \frac{n}{\pi}\alpha_k.$$

Si la masse totale de la couche est nulle, on a $A = 0$ et $\beta = 0$.

Pour résoudre le problème inverse : *Étant donnée une bande elliptique homogène, de densité* 1 *et de largeur* ζ *infiniment petite, trouver son potentiel logarithmique*, il suffit de former la fonction $\frac{\zeta}{l_0}$ et de la développer en série de fonctions M,

$$\frac{\zeta}{l_0} = \frac{\lambda}{2\pi} + \sum_1 \beta_k M_k.$$

Cherchant le potentiel de cette bande sous la forme

$$V_0 = \Sigma \alpha_k R_k^0 S_k^0 M_k,$$

nous aurons

$$\alpha_k = \frac{\pi}{n} \beta_k,$$

et le potentiel cherché sera

$$(27) \quad \left\{ \begin{aligned} V_0 &= \sum_0^\infty \frac{\pi}{n} \beta_k R_k^0 S_k^0 M_k, \\ V_i &= \sum_0^\infty \frac{\pi}{n} \beta_k S_k^0 R_k M_k, \\ V_e &= \sum_0^\infty \frac{\pi}{n} \beta_k R_k^0 S_k M_k - \lambda (u - u_0). \end{aligned} \right.$$

Si le développement de $\frac{\zeta}{l_0}$ contient un nombre fini de termes, le potentiel V en contiendra le même nombre.

Pour obtenir le potentiel newtonien d'une couche homogène, répandue sur un cylindre elliptique indéfini, parallèle à l'axe OZ et ayant pour directrice l'ellipse E_0, sachant que l'épaisseur de la couche, constante le long de chaque génératrice, est donnée par la formule

$$\zeta = l_0 \sum_1^\infty \beta_k M_k + l_0 \frac{\lambda}{2\pi},$$

il suffit de multiplier par 2 les formules donnant le potentiel logarithmique d'une bande elliptique de largeur ζ, ajoutée à l'ellipse E_0. Ce

qui nous donnera

$$(28)\quad \begin{cases} V_0 = \sum_0^\infty \frac{2\pi}{n} \beta_k S_k^0 R_k^0 M_k, \\ V_i = \sum_0^\infty \frac{2\pi}{n} \beta_k S_k^0 R_k M_k, \\ V_e = \sum_0^\infty \frac{2\pi}{n} \beta_k R_k^0 S_k M_k - 2A(u - u_0). \end{cases}$$

Exemple. — Appliquons ces formules au cas le plus simple :

$$n = 0, \qquad k = 0, \qquad M_k = 1, \qquad R_k = 1, \qquad S_k = 1.$$

Soit

$$\zeta = 2 l_0 M_0 = \varepsilon l_0 = \frac{A}{2\pi} l_0.$$

Alors

$$\frac{\zeta}{l_0} = \frac{A}{2\pi}$$

et le potentiel logarithmique,

$$V_0 = \alpha_0 = \text{const.}, \qquad V_i = \alpha_0, \qquad V_e = \alpha_0 - A(u - u_0).$$

Le potentiel est donc constant à l'intérieur de cette bande qui est une couronne elliptique située entre deux ellipses homothétiques, infiniment voisines. Vérifions cela.

Soit

$$f = \frac{x^2}{\rho^2 - a^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - b^2} = C$$

une famille d'ellipses homothétiques. La formule connue nous donne

$$\frac{dC}{dn} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} = 2\sqrt{\frac{x^2}{(\rho^2 - a^2)^2} + \frac{y^2}{(\rho^2 - b^2)^2}}$$

$$= \frac{2\alpha}{\rho} = \frac{2}{l_0\sqrt{(\rho^2 - a^2)(\rho^2 - b^2)}}$$

et

$$\zeta = dn = \frac{1}{2} dC\, l_0 \sqrt{(\rho^2 - a^2)(\rho^2 - b^2)}.$$

D'autre part, l'aire de l'ellipse étant

$$\pi C \sqrt{(\rho^2 - a^2)(\rho^2 - b^2)},$$

l'aire de la couronne est

$$A = \pi\, dC \sqrt{(\rho^2 - a^2)(\rho^2 - b^2)},$$

et nous aurons

$$\frac{\zeta}{l_0} = \frac{dn}{l_0} = \frac{1}{2} dC \sqrt{(\rho^2 - a^2)(\rho^2 - b^2)} = \frac{A}{2\pi}.$$

10° *Potentiel logarithmique de l'ellipse homogène et du cylindre elliptique indéfini et homogène.* — Soient E_0 l'ellipse en question et $V(x, y)$ son potentiel logarithmique au point $P(x, y)$. Ajoutons à cette ellipse une bande homogène de telle façon que l'ellipse se déplace parallèlement à l'axe OX, à la distance infiniment petite $OO' = \varepsilon$. Le nouveau potentiel au point P sera $V(x - \varepsilon, y)$ et, par conséquent, le potentiel logarithmique de la bande au même point P sera

$$V' = V(x - \varepsilon, y) - V(x, y) = -\varepsilon \frac{\partial V}{\partial x},$$

car nous prenons ε infiniment petit.

La largeur de la bande en un point quelconque de l'ellipse sera

$$\zeta = dn = \varepsilon \cos(dn, x)$$

ou, d'après la formule (23),

$$\zeta = \varepsilon h l_0 R_2^0 M_1$$

et son potentiel logarithmique sera

$$V'_0 = \varepsilon \pi h R_2^0 R_1^0 S_1^0 M_1,$$
$$V'_i = \varepsilon \pi h R_2^0 S_1^0 R_1 M_1,$$
$$V'_e = \varepsilon \pi h R_2^0 R_1^0 S_1 M_1,$$

car l'aire totale de la bande est évidemment nulle et $\varphi = 0$.

Comparant les deux expressions de V' nous trouvons

$$V'_i = -\varepsilon \frac{\partial V_i}{\partial x} = \varepsilon \pi h R_2^0 S_1^0 R_1 M_1 = \varepsilon \pi R_2^0 R_1^0 \frac{S_1^0}{R_1^0} x,$$
$$V'_e = -\varepsilon \frac{\partial V_e}{\partial x} = \varepsilon \pi h R_2^0 R_1^0 S_1 M_1 = \varepsilon \pi R_2^0 R_1^0 \frac{S_1}{R_1} x,$$

et, finalement,

$$\frac{\partial V_i}{\partial x} = -A \frac{S_1^0}{R_1^0} x, \qquad \frac{\partial V_e}{\partial x} = -A \frac{S_1}{R_1} x.$$

De même, faisant la translation parallèlement à l'axe OY, nous obtenons

$$\frac{\partial V_i}{\partial y} = -A\frac{S_2^0}{R_2^0}y, \qquad \frac{\partial V_e}{\partial y} = -A\frac{S_2}{R_2}y.$$

Ce qui nous donne, en tenant compte de la résolution du problème de Dirichlet (n° 8),

$$V_i = -\frac{1}{2}A\left[\frac{S_1^0}{R_1^0}x^2 + \frac{S_2^0}{R_2^0}y^2\right] + \text{const.},$$

$$V_e = -\frac{1}{2}A\left[\frac{S_1}{R_1}x^2 + \frac{S_2}{R_2}y^2\right] - A(u - u_0) + \text{const.}$$

Pour obtenir le potentiel newtonien d'un cylindre elliptique indéfini, homogène, parallèle à l'axe OZ, il suffit de multiplier par 2 les formules donnant le potentiel logarithmique de sa section droite. Ainsi nous aurons

$$(29)\qquad \begin{cases} V_i = -A\left[\dfrac{S_1^0}{R_1^0}x^2 + \dfrac{S_2^0}{R_2^0}y^2\right] + \text{const.}, \\ V_e = -A\left[\dfrac{S_1}{R_1}x^2 + \dfrac{S_2}{R_2}y^2\right] - 2A(u - u_0) + \text{const.}, \end{cases}$$

A étant l'aire de la section droite.

II. — Figures d'équilibre infiniment voisines d'un cylindre elliptique indéfini.

1° *Conditions d'équilibre d'un cylindre elliptique en rotation.* — Supposons qu'une masse fluide homogène, ayant la forme d'un cylindre elliptique indéfini dont la surface a pour équation

$$\frac{x^2}{R_1^2} + \frac{y^2}{R_2^2} = 1,$$

tourne avec la vitesse angulaire constante ω autour de OZ. Désignant par V son potentiel, la fonction des forces sera

$$U = V + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2).$$

Remplaçant V par sa valeur, nous trouvons les surfaces de niveau

$$U = \left(\frac{\omega^2}{2} - A\frac{S_1}{R_1}\right)x^2 + \left(\frac{\omega^2}{2} - A\frac{S_2}{R_2}\right)y^2 = \text{const.}$$

Si le cylindre est une figure d'équilibre, sa surface est une surface de niveau, ce qui nous donne la condition

$$(\omega^2 R_2^2 - 2AS_1R_1) = (\omega^2 R_2^2 - 2AS_2R_2);$$

d'où nous tirons

$$(30) \qquad \frac{\omega^2}{A} = \frac{2(R_2S_2 - R_1S_1)}{R_2^2 - R_1^2} = \frac{4(\sqrt{\rho^2 - b^2} - \sqrt{\rho^2 - a^2})}{(a^2 - b^2)(\sqrt{\rho^2 - b^2} + \sqrt{\rho^2 - a^2})}.$$

Cette condition nous détermine, ω étant donnée, le rapport des axes de l'ellipse de la section droite. Substituant la valeur de $A = \pi R_1 R_2$, nous aurons

$$\frac{\omega^2}{\pi} = \frac{4R_1R_2}{(R_1 + R_2)^2},$$

cette équation du deuxième degré en $\frac{R_1}{R_2}$ donne pour ce rapport deux valeurs inverses l'une de l'autre à condition que

$$\frac{\omega^2}{2\pi} \leqq \frac{1}{2} \qquad \text{ou} \qquad \omega^2 \leqq \pi.$$

2° *Valeur de la pesanteur sur un cylindre elliptique en rotation et en équilibre relatif.*

Étant

$$U = V + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2)$$

la fonction des forces, la pesanteur g est la dérivée suivant la normale extérieure de la fonction U, prise avec le signe $-$,

$$g = -\frac{\partial U}{\partial n}.$$

Or, le cylindre étant une figure d'équilibre, on a

$$U = f(x, y) = k\left(\frac{x^2}{\rho^2 - a^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - b^2}\right) + \text{const.},$$

k étant une certaine constante. Donc

$$g = -\frac{\partial f}{\partial n} = -k\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} = -2k\sqrt{\frac{x^2}{(\rho^2-a^2)^2} + \frac{y^2}{(\rho^2-b^2)^2}},$$

et, définitivement,

$$g = \frac{2k}{lA\rho}.$$

Mais sur le cylindre ρ et par conséquent A sont constants, et cela nous permet de formuler le théorème suivant :

Théorème. — *Sur la surface d'un cylindre elliptique homogène et indéfini, tournant autour de l'axe* OZ *avec une vitesse angulaire constante et se trouvant en équilibre relatif,*

$$gl = \text{const.}$$

Calculons la constante. Il suffit de la calculer pour n'importe quel point, par exemple pour le point $x = R_1$, $y = 0$. Nous aurons alors

$$l = \frac{1}{\sqrt{\rho^2-\mu^2}} = \frac{1}{\sqrt{\rho^2-b^2}} = \frac{1}{R_2},$$

et, tenant compte de la formule (30), nous aurons

$$gl = \frac{1}{R_2}\left(2A\frac{S_1}{R_1} - \omega^2\right)x = \frac{2\pi R_1 R_2}{a^2-b^2}(S_1R_2 - R_1S_2).$$

Mais,

$$R_1R_2 = R_3,$$

$$(S_1R_2 - R_1S_2) = R_1R_2\int_\infty^u \frac{-2\,du}{R_1^2} - \int_\infty^u \frac{-2\,du}{R_2^2}$$

$$= \frac{a^2-b^2}{2}R_3\int_\infty^u \frac{-4\,du}{R_3^2} = \frac{a^2-b^2}{2}S_3$$

et, finalement,

$$gl = \pi R_3 S_3. \tag{31}$$

3° *Recherche des cylindres de bifurcation.* — Problème. — *Étant donné un cylindre elliptique fluide en rotation uniforme et en équilibre relatif, trouver s'il existe des figures d'équilibre infiniment voisines.*

Déformons le cylindre en ajoutant à sa surface une couche d'épaisseur ζ, constante le long de chaque génératrice, et dont la masse totale est nulle. Considérons l'ellipse E_0 de la section droite. Soit

$$\zeta = dn = P_0P.$$

Pour que la nouvelle figure soit d'équilibre, il faut et il suffit que la nouvelle surface soit une surface de niveau. Soit U_0 la fonction des forces, relative au cylindre primitif, à sa surface (au point P_0); alors sur la nouvelle surface (au point P) cette fonction aura la valeur

$$U = U_0 + \left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_0 \zeta = U_0 - g\zeta.$$

D'autre part, désignant par V' le potentiel de la couche sur elle-même, la fonction totale des forces au point P sera

$$U + V' = U_0 + V' - g\zeta.$$

Pour que la nouvelle figure soit d'équilibre, il faut que cette fonction soit constante, mais comme U_0 est constante, la condition cherchée sera

$$V' - g\zeta = \text{const.} \tag{32}$$

Pour avoir le potentiel V' il faut développer en série de fonctions M la fonction $\frac{\zeta}{l_0}$. Soit

$$\frac{\zeta}{l_0} = \sum_1^\infty \beta_k M_k,$$

car le volume total de la couche étant nul, $\beta_0 = 0$.

Le potentiel de cette couche est donc

$$V'_0 = \sum_1^\infty \frac{2\pi}{n} \beta_k R_k^0 S_k^0 M_k$$

et notre condition (32) devient

$$\sum_1^\infty \beta_k \left[\frac{2\pi}{n} R_k S_k - gl\right] M_k = \text{const.}$$

et, finalement,

$$\sum_{1} \beta_k \, 2\pi \left[\frac{R_k S_k}{n} - \frac{R_3 S_3}{2} \right] M_k = \text{const.}$$

Cette condition doit avoir lieu sur toute l'ellipse E_0, c'est-à-dire pour n'importe quel μ. C'est donc une identité, et comme le développement en série est unique, nous aurons, en égalant les coefficients, une série de conditions

$$\beta_k \left[\frac{R_k S_k}{n} - \frac{R_3 S_3}{2} \right] = 0 \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots, \infty). \tag{33}$$

La constante elle-même est nulle, car $\beta_0 = 0$.

Pour $k = 1$ la quantité entre crochets devient

$$\frac{R_1 S_1}{1} - \frac{R_3 S_3}{2},$$

et, comme elle est différente de zéro, nous devons avoir

$$\beta_1 = 0.$$

Pour $k = 2$ nous aurons le même résultat, ce qui nous donnera

$$\beta_2 = 0.$$

Pour $k = 3$ la quantité entre crochets est identiquement nulle, et nous aurons

$$b_3 \text{ est arbitraire.}$$

Pour $k > 3$ la quantité entre crochets en général n'est pas nulle, par conséquent nous aurons, en général,

$$\beta_k = 0 \qquad \text{si} \qquad k > 3.$$

La question revient donc à chercher les cylindres ou, ce qui revient au même, les ellipses E_0 pour lesquels

$$\frac{R_k S_k}{n} - \frac{R_3 S_3}{2} = 0. \tag{34}$$

Mais à un cylindre quelconque en équilibre relatif nous ne pouvons ajouter qu'une couche unique, d'épaisseur $\zeta = \beta_3 l_0 M_3$, pour que la nouvelle figure reste d'équilibre.

Montrons que ce procédé ne nous donnera pas de figure nouvelle, car cette couche ne fait que faire tourner le cylindre autour de l'axe OZ d'un certain angle $d\theta$. Soit $V(xy)$ le potentiel de notre cylindre en un point quelconque $P(xy)$. Tournons notre cylindre de l'angle $d\theta$. Le nouveau potentiel au même point P sera

$$V_1 = V(x - y\,d\theta,\ y + x\,d\theta),$$

il en résulte que le potentiel de la couche qu'il fallait ajouter pour effectuer ce déplacement est

$$V' = V_1 - V = d\theta\left(-y\frac{\partial V}{\partial x} + x\frac{\partial V}{\partial y}\right),$$

et, finalement, remplaçant les dérivées par leurs valeurs,

$$V' = 2\,d\theta\,A\left(\frac{S_1}{R_1} - \frac{S_2}{R_2}\right)xy.$$

Mais

$$xy = h^2 R_3 M_3$$

et toutes les autres quantités sont constantes sur le cylindre, donc nous aurons

$$V' = \alpha_3 M_3$$

et l'épaisseur de la couche correspondante

$$\zeta = \beta_3 l_0 M_3. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Par conséquent, il nous reste à chercher les cylindres pour lesquels la condition (34) est vérifiée. Nous trouverons ainsi une série discontinue de cylindres qui donneront naissance à de nouvelles figures d'équilibre.

Nous les nommerons les *cylindres de bifurcation*. Comme les cylindres se déterminent complètement par leur section droite E_0, nous ne considérerons dorénavant que ces ellipses de section droite, et nous chercherons ainsi les ellipses de bifurcation qui déterminent les cylindres en question.

La question se ramène donc à la résolution de l'équation (34) qui nous donnera le rapport des axes de l'ellipse cherchée; nous trouverons l'ellipse elle-même en écrivant la condition que son aire doit avoir la valeur donnée.

4° *Discussion de l'équation*

$$\frac{R_k S_k}{n} - \frac{R_3 S_3}{2} = 0.$$

Considérons l'équation plus générale

$$\frac{R_k S_k}{n} - \frac{R_i S_i}{p} = 0. \tag{35}$$

Si nous posons

$$\frac{\sqrt{\rho^2 - a^2}}{\sqrt{\rho^2 - b^2}} = t \qquad (0 \leqq t \leqq 1 \text{ pour } a^2 \leqq \rho^2 < \infty),$$

l'équation (35) devient algébrique, rationnelle en t. Posant ensuite

$$\frac{\sqrt{\rho^2 - b^2} - \sqrt{\rho^2 - a^2}}{\sqrt{\rho^2 - b^2} + \sqrt{\rho^2 - a^2}} = \frac{1 - t}{1 + t} = x \qquad (0 \leqq x \leqq 1 \text{ pour } a^2 \leqq \rho^2 < \infty),$$

nous aurons

$$\frac{R_i S_i}{p} = \frac{1 \pm x^p}{p},$$

où il faut prendre le signe + ou le signe − suivant que i est pair ou impair. L'équation (35) s'écrit alors

$$F = \frac{1 \pm x^p}{p} - \frac{1 \pm x^n}{n} = 0. \tag{36}$$

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Pour que l'équation* (35) *ait une racine et une seule pour* $a^2 < \rho^2 < \infty$, *il faut et il suffit :* 1° *que* $p \neq n$ *et* 2° *que le plus petit indice* (i) *soit impair et le plus grand indice* (k) *soit pair.*

Si $p = n$, l'équation (36) devient $x^n \pm x^n = 0$, donc elle a la racine $x = 0$ ou elle est identiquement nulle. La deuxième condition est suffisante, car l'équation (35) s'écrit alors

$$nF = -\left(\frac{n}{p} x^p + x^n\right) + \frac{n}{p} - 1 = 0.$$

Or, pour $x = 0$,

$$nF = \left(\frac{n}{p} - 1\right) > 0,$$

et pour $x = 1$,

$$nF = -2 < 0;$$

et comme la dérivée conserve son signe $(-)$, l'équation (36) et par conséquent l'équation (35) a une racine et une seule pour $0 \leqq x < 1$ ou pour $a^2 < \rho^2 < \infty$.

Cette même condition est nécessaire. En effet, si cette condition n'est pas satisfaite, il peut se présenter deux cas : 1° i est pair et k impair, alors nous avons

$$nF = \left(\frac{n}{p}x^p + x^n\right) + \left(\frac{n}{p} - 1\right) = 0$$

et la fonction F est positive pour toute valeur de x entre 0 et 1 ; 2° i et k sont simultanément pairs ou impairs. Dans ce cas, l'équation (35) s'écrit

$$nF = \left(\frac{n}{p}x^p - x^n\right) \pm \left(\frac{n}{p} - 1\right) = 0.$$

La fonction F est positive ou négative dans tout l'intervalle (0 ... 1) suivant que nous prenons le signe $(+)$ ou le signe $(-)$ et ne s'annule que pour $x = 1$ si nous prenons le signe $(-)$. Donc, elle n'a pas de racine pour $0 < x < 1$ et le théorème est démontré.

Dans notre équation (34),

$$\frac{R_3 S_3}{2} - \frac{R_k S_k}{n} = 0 \qquad (k > 3),$$

$i = 3$ est impair, donc l'équation a une racine et une seule, à condition que k soit pair. Par conséquent, les fonctions R et M à considérer sont de la forme

$$R_k = f(\rho^2) \qquad \text{ou} \qquad R_k = \sqrt{\rho^2 - b^2}\, f(\rho^2), \qquad M_k = \cos(nv),$$

et l'équation en x est toujours de la forme

$$(37) \qquad \frac{1 - x^2}{2} - \frac{1 + x^n}{n} = 0 \qquad (n > 2).$$

Cette équation admet des réductions. Soit n impair, alors l'équa-

tion divisée par $1 + x$ devient

$$(38) \qquad -\frac{n-2}{2} + \frac{n-2}{2}x + x^2 - x^3 + \ldots + x^{n-1} = 0.$$

Si n est pair, en posant $x^2 = y$, $m = 2n$, nous aurons

$$(39) \qquad y^m + my - (m-1) = 0.$$

Donnant à n les valeurs $n = 3, 4, 5, \ldots$ et résolvant les équations obtenues, nous aurons une série d'ellipses de bifurcation. La vitesse correspondante ω sera donnée par la formule (30) qui s'écrit

$$\frac{\omega^2}{A} = \frac{4x}{a^2 - b^2} = \frac{4x}{R_2^2 - R_1^2}.$$

Substituant la valeur de A et introduisant les valeurs de t et de x, nous aurons les formules

$$(40) \qquad \frac{\omega^2}{\pi} = \frac{4t}{(1+t)^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{\omega^2}{\pi} = 1 - x^2;$$

on voit ainsi que ω^2 croît avec t (si $t < 1$) et décroît avec x.

Les racines de l'équation (37) vont en croissant avec n, car, considérant x comme fonction de n, nous aurons

$$\frac{dx}{dn} = \frac{1 - x^2 - 2x^n \lg x}{2nx(1 + x^{n-2})} > 0.$$

Nous pouvons tirer les conclusions suivantes :

1° L'aplatissement du cylindre et la vitesse angulaire varient en sens inverse, c'est-à-dire, plus la vitesse est grande, plus l'aplatissement est petit;

2° Si la vitesse ω, partant de son maximum, va en diminuant, la masse fluide passe successivement par toutes les figures de bifurcation dans l'ordre des n croissants.

Remarque. — La vitesse ω maximum correspond à $t = 1$, $x = 0$, c'est-à-dire au cylindre circulaire. Par conséquent le cylindre circulaire ne peut jamais devenir elliptique, car pour qu'il le devienne, il faut que ω atteigne la valeur $\sqrt{\pi}$ et, sans la dépasser, commence à dimi-

nuer. La figure d'un cylindre elliptique ne peut donc dériver que d'un fluide qui était, au moment de repos, dans un plan indéfini. S'il commence à tourner autour de la normale du plan, nous aurons les ellipsoïdes de Mac Laurin; si, au contraire, il commence à tourner autour d'un axe situé dans le plan même, nous aurons, si la vitesse augmente, tous les cylindres elliptiques depuis les plus aplatis, jusqu'au cylindre circulaire.

5° *Figures d'équilibre en forme de cylindre non elliptique.* — Nous considérerons toujours la section droite E_0 de notre cylindre. Nous avons vu que, quelle que soit la figure de bifurcation, la couche susceptible de donner une nouvelle figure d'équilibre est donnée par la formule

$$\zeta = \beta_{2n} l_0 \cos(nv).$$

On voit aisément que l'épaisseur ζ ne peut jamais s'annuler aux extrémités du grand axe $B(y = R_2)$ et $B'(y' = -R_2)$ et que si n est pair, le signe de ζ est le même en B et B', positif ou négatif suivant le signe de β_{2n}. Nous aurons ainsi deux figures différentes, symétriques par rapport à OX. Si n est impair, ζ a des signes opposés aux points B et B'. Nous aurons une seule figure dissymétrique par rapport à l'axe OX. Le changement de signe de β_{2n} ne fait que faire tourner notre figure autour de son centre de l'angle π.

La première ellipse de bifurcation s'obtient en posant $n = 3$. L'équation (38) devient

$$x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0.$$

Les racines sont

$$x_1 = \frac{1}{2}, \qquad x_2 = -1.$$

Donc la valeur cherchée de x est

$$x = \frac{1}{2}.$$

Le rapport des axes nous sera donné par la formule

$$x = \frac{1-l}{1+l} = \frac{1}{2}, \qquad \text{d'où} \qquad l = \frac{\sqrt{\rho^2 - a^2}}{\sqrt{\rho^2 - b^2}} = \frac{1}{3}.$$

La couche qu'on peut appliquer sur cette ellipse a une épaisseur :

$$\zeta = \beta_6 l M_6 = \beta_6 l \cos(3\varphi) = -\beta_6 l \sin(3\theta).$$

On voit que ζ s'annule en six points,

$$\theta = 0, \quad \frac{1}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi, \quad \pi, \quad \frac{4}{3}\pi, \quad \frac{5}{3}\pi$$

ou

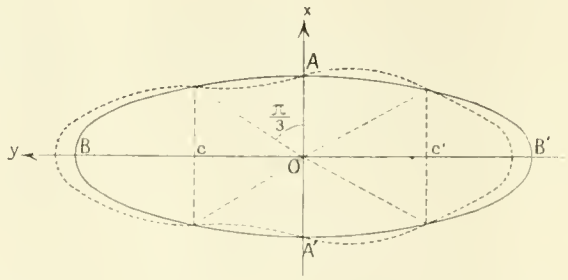
$$\varphi = \frac{1}{6}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{5}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{11}{6}\pi.$$

Remarquant qu'au point $B(x = 0, y = R_2)$ $\varphi = 0$ et $\cos 3\varphi = 1$ nous voyons que si β_6 est positif, ζ est positive au point B et dans tout l'intervalle

$$-\frac{1}{6}\pi < \varphi < \frac{1}{6}\pi.$$

Dans les autres intervalles, ζ est alternativement positive et négative, et nous aurons une figure analogue à la figure 1.

Fig. 1.



Ce cas correspond à la figure piriforme de Poincaré.

Il est utile de remarquer que l_0 varie sur l'ellipse de $(\rho^2 - b^2)^{-\frac{1}{2}}$ aux points A, jusqu'à $(\rho^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}}$ aux points B. Ces valeurs ont entre elles le rapport de 1 à 3. Par conséquent nous aurons le maximum de ζ aux points B et B'.

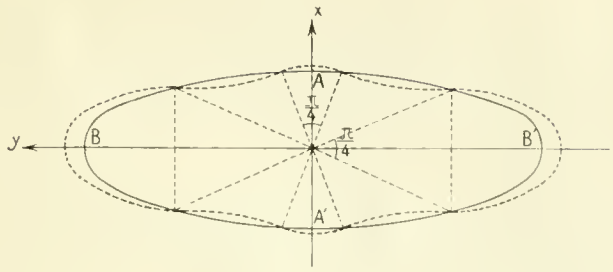
Les dimensions de cette première ellipse de bifurcation sont :

$$A = 3\pi, \qquad OA = 1, \qquad OB = 3, \qquad OC = 1,5, \qquad \frac{\omega^2}{2\pi} = \frac{3}{8}$$

ou encore

$$A = \pi, \qquad OA = \frac{1}{3}\sqrt{3}, \qquad OB = \sqrt{3}, \qquad OC = \frac{1}{2}\sqrt{3}, \qquad \frac{\omega^2}{2\pi} = \frac{3}{8}.$$

Fig. 2.



Pour obtenir la deuxième ellipse de bifurcation, il faut, dans l'équation (39), poser $n = 4$, $m = 2$. Nous aurons

$$y^2 + 2y - 1 = 0.$$

D'où l'on tire

$$y = -1 \pm \sqrt{2},$$

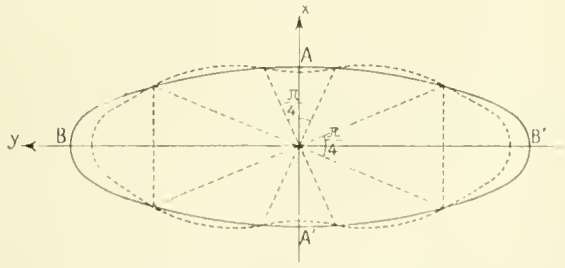
et, par suite,

$$x = \sqrt{\sqrt{2} - 1} = 0,64,$$

$$\frac{R_1}{R_2} = t = 0,22 = \frac{9}{41},$$

$$\frac{\omega^2}{2\pi} = 0,295.$$

Fig. 3.



L'épaisseur de la couche est donnée par la formule

$$\zeta = \beta_8 l \cos(4\varepsilon),$$

donc ζ s'annule en huit points

$$\varphi = \frac{1}{8}\pi, \quad \frac{3}{8}\pi, \quad \frac{5}{8}\pi, \quad \frac{7}{8}\pi, \quad \frac{9}{8}\pi, \quad \frac{11}{8}\pi, \quad \frac{13}{8}\pi, \quad \frac{15}{8}\pi.$$

Si β_8 est positif, ζ est positive aux points B et B′ et nous avons la figure 2.

Si β_8 est négatif, ζ est aussi négative en B et B′ et nous aurons la figure 3.

Et ainsi de suite.

Cylindre circulaire. — Si nous refaisons les mêmes calculs pour le cas du cylindre circulaire, nous obtenons sans difficulté que la condition $V' - g\zeta = \text{const.}$ s'écrit dans ce cas

$$\sum_1 \left[\frac{2\pi}{n} - (2\pi - \omega^2)\right] r_0^{n+1} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) = \text{const.}.$$

A_n et B_n étant les coefficients de développement de l'épaisseur ζ en série de Fourier,

$$\zeta = \sum_1^\infty r^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta).$$

Par conséquent, l'équation qui détermine la vitesse ω, relative à un cylindre de bifurcation, est

$$\frac{2\pi}{n} - (2\pi - \omega^2) = 0$$

ou

$$\frac{\omega^2}{2\pi} = 1 - \frac{1}{n} \qquad (n = 1, 2, 3, 4, \ldots).$$

Les valeurs de $\frac{\omega^2}{2\pi}$ relatives aux cylindres de bifurcation, sont donc

$$\frac{\omega^2}{2\pi} = 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots, 1$$

pour

$$n = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots, \infty.$$

L'épaisseur de la couche qui déterminera la nouvelle figure sera donnée alors par la formule

$$\zeta = \beta_n \cos n\theta.$$

Nous aurons le premier cylindre de bifurcation pour $n = 2$, $\omega^2 = \pi$. Ce cylindre donne naissance, comme d'ailleurs nous l'avons vu, aux cylindres elliptiques.

6° *Stabilité.* — Soit E_0 le cylindre elliptique en rotation et en équilibre relatif, et soit V_0 son potentiel à la surface. Alors, en un point, dont la distance au cylindre est λ (infiniment petite), son potentiel sera

$$V = V_0 - g\lambda.$$

Supposons que le cylindre subisse une déformation et calculons l'énergie de la figure déformée. Soient ζ l'épaisseur de la couche, produisant la déformation, $d\mu$ l'élément de son volume et V' son potentiel à la surface.

L'énergie totale se compose de deux parties :

1° L'énergie due à l'attraction;

2° L'énergie due à la force centrifuge.

Par conséquent, désignant par dm l'élément de volume du cylindre et par r la distance à l'axe OZ, l'énergie cherchée sera

$$W = \frac{1}{2}\int V\,dm + \int V\,d\mu + \frac{1}{2}\int V'\,d\mu + \int \frac{\omega^2 r^2}{2}\,dm + \int \frac{\omega^2 r^2}{2}\,d\mu.$$

Or l'énergie du système avant la déformation était

$$W_0 = \frac{1}{2}\int V\,dm + \frac{1}{2}\int \omega^2 r^2\,dm;$$

en outre, la quantité $\int \frac{\omega^2 r^2}{2}\,d\mu$ est négligeable, car la masse totale de la couche est nulle. Cela posé, nous aurons

$$W = W_0 + \int V\,d\mu + \frac{1}{2}\int V'\,d\mu = W_0 + \int \left(V + \frac{1}{2}V'\right) d\mu.$$

Mais $V = V_0 - g\lambda$ et, par conséquent,

$$\int V\,d\mu = \int V_0\,d\mu - \int g\lambda\,d\mu = -\int g\lambda\,d\mu.$$

Soit $d\omega$ l'élément de la surface, comprise entre deux génératrices infiniment voisines. Alors $d\mu = d\lambda\, d\omega$ et nous aurons

$$\int V\, d\mu = -\int\int g\lambda\, d\lambda\, d\omega = -\int g\, d\omega \int_0^\zeta \lambda\, d\lambda = -\int g \frac{\zeta^2}{2}\, d\omega,$$

de même

$$\frac{1}{2}\int V'\, d\mu = \int \frac{V'\zeta}{2}\, d\omega.$$

Écrivant

$$\zeta = \Sigma A_i l M_i,$$

nous aurons

$$V' = \sum \frac{2\pi}{n} A_i R_i^0 S_i^0 M_i,$$

ensuite

$$\frac{\zeta^2}{2} = \sum_i \frac{A_i^2}{2} l^2 M_i^2 + \sum_{ik} A_i A_k l^2 M_i M_k,$$

$$\frac{V'\zeta}{2} = \sum \frac{\pi}{n} A_i^2\, l S_i^0 R_i^0 M_i^2 + \sum \frac{\pi}{n} A_i A_k R_i^0 S_i^0\, l M_i M_k.$$

En tenant compte de ce que $\int l M_i M_k\, d\omega = 0$ et que $gl = \pi R_3^0 S_3^0$, nous aurons

$$W = W_0 - \pi \sum A_i^2 \left(\frac{S_3^0 R_3^0}{2} - \frac{R_i^0 S_i^0}{n}\right) \int l M_i^2\, d\omega.$$

Nous pouvons considérer que la nouvelle surface soit définie par les coefficients A_i, alors les coefficients de stabilité sont

$$-\pi\left(\frac{R_3 S_3}{2} - \frac{R_i S_i}{n}\right) \int l M_i^2\, d\omega.$$

Comme l'intégrale est toujours positive, la condition nécessaire et suffisante pour que la figure soit stable est

$$(41) \qquad \frac{R_3 S_3}{2} - \frac{R_i S_i}{n} > 0 \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, \infty).$$

Écrivant cette condition sous la forme

$$\frac{1 - x^2}{2} - \frac{1 \pm x^n}{n} > 0,$$

nous voyons qu'elle ne sera pas vérifiée pour $i = 1$, $i = 2$ et $i = 4$,

quel que soit x et que pour $i > 4$, c'est-à-dire pour $n > 2$, elle sera vérifiée si la valeur de x ne dépasse par $\frac{1}{2}$. Si $x > \frac{1}{2}$ il y aura au moins une valeur de $i > 4$ pour laquelle la condition (41) ne sera pas vérifiée. La déformation relative à $i = 1$ ou à $i = 2$ n'est qu'une translation parallèle à l'un des axes coordonnés. Quant à la déformation relative à $i = 4$, la couche qui lui correspond sera de l'épaisseur

$$\zeta = \beta_4 l M_4 = \beta_4 l \cos(2v).$$

Cette déformation accentue l'aplatissement du cylindre.

Par conséquent, tous les cylindres elliptiques sont instables, mais, pour $x < \frac{1}{2}$, le degré d'instabilité est 1. Le cylindre est stable pour toute déformation qui n'augmente pas son aplatissement. Pour $x > \frac{1}{2}$ le degré d'instabilité est plus grand que 1.

Pour les cylindres circulaires la condition (41) doit être remplacée par

$$1 - \frac{1}{n} - \frac{\omega^2}{2\pi} > 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Si ω^2 ne dépasse pas π, cette condition sera vérifiée si $n > 1$. Mais la déformation relative à $n = 1$ est une translation suivant une direction perpendiculaire à l'axe de rotation, qui ne modifie pas la figure du cylindre circulaire. Par conséquent, tous les cylindres circulaires sont stables pour n'importe quelle vitesse angulaire ω, pourvu qu'elle ne dépasse pas la valeur $\sqrt{\pi}$. Pour la vitesse angulaire plus grande que $\sqrt{\pi}$ l'équilibre est instable et le degré d'instabilité est d'autant plus grand que ω est plus grande.

Remarque I. — Les conditions de stabilité ne changent pas si, pour critérium de stabilité, nous prenons, avec Poincaré, la condition que $W - \omega^2 I$ est maximum, car, dans nos calculs, nous avons complètement négligé le moment d'inertie de la couche.

Remarque II. — Les résultats ne changent pas non plus si, dans l'énoncé du problème, nous prenons les conditions du problème que Poincaré appelle *problème naturel*, c'est-à-dire si nous prenons ω

variable, mais le moment de rotation $\mu = \omega^2 I$ constant. Nous aurons la formule

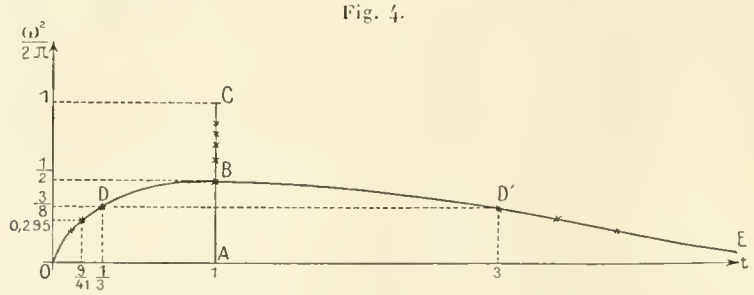
$$\omega^2 = k\mu \frac{t^2}{(1+t^2)^2}$$

(k étant une constante), qui est absolument analogue à la formule (40)

$$\omega^2 = 4\pi \frac{t}{(1+t)^2}.$$

Pour résumer, faisons la représentation graphique (*voir* Poincaré, *Figures d'équilibre d'une masse fluide en rotation*). Portons sur l'un des axes coordonnés le rapport t des axes du cylindre et sur l'autre la quantité $\frac{\omega^2}{2\pi}$.

Fig. 4.



La droite ABC représente les cylindres circulaires et la courbe ODB tous les cylindres elliptiques. La courbe BD′E représente les mêmes cylindres, mais tournés de l'angle $\frac{\pi}{2}$. Quelques points de bifurcation sont marqués par de petites croix.

Comme les cylindres circulaires sont stables sur AB, ils sont instables sur BC, de même que les cylindres elliptiques sur ODBE. Le point D est le point de bifurcation où les cylindres, analogues aux figures piriformes, prennent naissance. La courbe représentative de ces cylindres doit être tangente à ODB en D sans la couper et nous ne pouvons rien dire sur la stabilité de ces figures. Le plus probable est qu'elles sont instables, quoique M. Jeans (*voir* l'Introduction) croie le contraire. Mais il croit de plus que les cylindres elliptiques sont aussi stables, ce qui n'est pas exact, comme nous venons de le voir.

DEUXIÈME PARTIE.

Figures d'équilibre d'une masse liquide en rotation sous l'action des forces newtoniennes et de la faible pression capillaire.

1° *Notations et formules.* — Au cours de cette deuxième Partie, j'emploierai les notations et les formules suivantes, empruntées à l'Ouvrage de Poincaré : *Figures d'équilibre d'une masse fluide en rotation* (leçons professées à la Sorbonne en 1900).

Prenant pour coordonnées elliptiques les racines positives ρ, μ, ν ($\rho > \mu > \nu$) de l'équation

$$\frac{x^2}{\lambda^2 - a^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - b^2} + \frac{z^2}{\lambda^2 - c^2} - 1 = 0,$$

on désigne par $R_i(\rho)$, $M_i(\mu)$, $N_i(\nu)$ les fonctions de Lamé, c'est-à-dire les fonctions de ρ, de μ et de ν, telles que leur produit (produit de Lamé)

$$R_i M_i N_i$$

soit une fonction harmonique, symétrique en ρ, μ, ν. Dans les coordonnées rectilignes, le produit de Lamé de degré n représente un polynome harmonique de même degré en x, y, z (on entend par *degré du produit de Lamé* le degré de chacune des fonctions R, M, N).

Dans chaque degré n il y a $2n+1$ différentes fonctions de Lamé et, par suite, $2n+1$ différents produits de Lamé.

Les fonctions de Lamé peuvent être de quatre types et de huit

espèces. Désignant par $f(\rho^2)$ un polynome en ρ^2, nous aurons :

$$(1)\quad \begin{cases} \text{Type I.} & 1^\circ\ R = f(\rho^2); \\ \text{Type II.} & \begin{cases} 2^\circ\ R = \sqrt{\rho^2 - a^2}\, f(\rho^2), \\ 3^\circ\ R = \sqrt{\rho^2 - b^2}\, f(\rho^2), \\ 4^\circ\ R = \sqrt{\rho^2 - c^2}\, f(\rho^2); \end{cases} \\ \text{Type III.} & \begin{cases} 5^\circ\ R = \sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\rho^2 - c^2}\, f(\rho^2), \\ 6^\circ\ R = \sqrt{\rho^2 - c^2}\sqrt{\rho^2 - a^2}\, f(\rho^2), \\ 7^\circ\ R = \sqrt{\rho^2 - a^2}\sqrt{\rho^2 - b^2}\, f(\rho^2); \end{cases} \\ \text{Type IV.} & 8^\circ\ R = \sqrt{\rho^2 - a^2}\sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\rho^2 - c^2}\, f(\rho^2). \end{cases}$$

Les types I et III correspondent à n pair, les types II et IV correspondent à n impair. On aura les fonctions M et N en remplaçant ρ par μ et ν.

On démontre que $f(\rho^2)$ a toutes ses racines réelles, distinctes et comprises entre a et c, et que, par conséquent, le produit de Lamé, type I : $f(\rho^2)f(\mu^2)f(\nu^2)$ est un polynome en x^2, y^2, z^2. Cela découle immédiatement de l'identité fondamentale

$$\frac{x^2}{\lambda^2 - a^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - b^2} + \frac{z^2}{\lambda^2 - c^2} - 1 = \frac{(\lambda^2 - \rho^2)(\lambda^2 - \mu^2)(\lambda^2 - \nu^2)}{(\lambda^2 - a^2)(\lambda^2 - b^2)(\lambda^2 - c^2)}$$

qui donne, si l'on désigne par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ les racines de $f(\rho^2)$,

$$(2)\quad f(\rho^2)f(\mu^2)f(\nu^2) = \text{const.} \prod_{i=1}^{i=k} \left[\frac{x^2}{\alpha_i - a^2} + \frac{y^2}{\alpha_i - b^2} + \frac{z^2}{\alpha_i - c^2} - 1\right].$$

On admet les notations suivantes :

Pour $n = 0$, il y a une seule fonction de Lamé :

$$R_0 = M_0 = N_0 = 1.$$

Pour $n = 1$, il y a trois fonctions :

$$(3)\quad \begin{cases} R_1 = \sqrt{\rho^2 - a^2}, & M_1 = \sqrt{\mu^2 - a^2}, & N_1 = \sqrt{\nu^2 - a^2}, \\ R_2 = \sqrt{\rho^2 - b^2}, & M_2 = \sqrt{\mu^2 - b^2}, & N_2 = \sqrt{\nu^2 - b^2}, \\ R_3 = \sqrt{\rho^2 - c^2}, & M_3 = \sqrt{\mu^2 - c^2}, & N_3 = \sqrt{\nu^2 - c^2}. \end{cases}$$

Pour $n = 2$, il y a cinq fonctions de Lamé :

$$(4)\qquad \begin{cases} R_4 = \sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\rho^2 - c^2} = R_2 R_3, \\ R_5 = \sqrt{\rho^2 - c^2}\sqrt{\rho^2 - a^2} = R_3 R_1, \\ R_6 = \sqrt{\rho^2 - a^2}\sqrt{\rho^2 - b^2} = R_1 R_2, \\ R_7 = \rho^2 - \alpha_1, \\ R_8 = \rho^2 - \alpha_2, \end{cases}$$

α_1 et α_2 étant les racines de l'équation

$$(5)\qquad \frac{1}{\alpha - a^2} + \frac{1}{\alpha - b^2} + \frac{1}{\alpha - c^2} = 0 \qquad (a^2 > \alpha_1 > b^2 > \alpha_2 > c^2).$$

Pour $n = 3$, il y a sept fonctions, parmi lesquelles nous citerons

$$(6)\qquad R_9 = \sqrt{\rho^2 - a^2}\sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\rho^2 - c^2},$$

et ainsi de suite. Les fonctions M et N s'obtiennent en remplaçant, dans les formules (4) et (6), ρ par μ et ν.

Avec ces notations, posant

$$h_1 = \frac{1}{\sqrt{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}}, \qquad h_2 = \frac{1}{\sqrt{(b^2 - a^2)(b^2 - c^2)}},$$

$$h_3 = \frac{1}{\sqrt{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)}},$$

on aura

$$(7)\qquad \begin{cases} x = h_1 R_1 M_1 N_1, & y = h_2 R_2 M_2 N_2, & z = h_3 R_3 M_3 N_3, \\ yz = h_2 h_3 R_4 M_4 N_4, & zx = h_3 h_1 R_5 M_5 N_5, & xy = h_1 h_2 R_6 M_6 N_6. \end{cases}$$

Le volume de l'ellipsoïde sera

$$(8)\qquad T = \frac{4}{3}\pi R_1 R_2 R_3.$$

Les cosinus directeurs de la normale seront

$$(9)\qquad \begin{cases} \cos(n, x) = l h_1 M_1 N_1 R_4, \\ \cos(n, y) = l h_2 M_2 N_2 R_5, \\ \cos(n, z) = l h_3 M_3 N_3 R_6, \end{cases}$$

où l'on pose

$$(10)\qquad l = \frac{1}{\sqrt{(\rho^2 - \mu^2)(\rho^2 - \nu^2)}}.$$

Comme sur un ellipsoïde ρ est constant, toute fonction à sa surface est fonction de μ et de ν seuls.

On démontre qu'une telle fonction peut être développée (si elle vérifie certaines conditions très larges) en une série de produits $M_i N_i$, qui sont absolument analogues aux fonctions sphériques P_i^n sur la sphère, aux fonctions M_i sur l'ellipse et aux fonctions $\sin(i\varphi)$ et $\cos(i\varphi)$ sur un cercle.

On démontre aussi que ce développement est unique et ne dépend pas du choix de l'ellipsoïde.

Les coefficients du développement

$$f(\mu, \nu) = A_0 + A_1 M_1 N_1 + A_2 M_2 N_2 + \ldots + A_i M_i N_i + \ldots$$

se calculent, comme dans la série de Fourier, à l'aide de la formule

$$\int\int l M_i N_i M_k N_k \, d\sigma = 0$$

étant $k \neq i$ et l'intégrale étant étendue à toute la surface de l'ellipsoïde. Ce qui donne la formule pour les coefficients

$$(11) \qquad A_i = \frac{\int\int l f(\mu, \nu) M_i N_i \, d\sigma}{\int\int l (M_i N_i)^2 \, d\sigma}.$$

On appelle S_i *fonction de Lamé de seconde espèce*, une fonction transcendante, jouissant des mêmes propriétés que R_i et donnée par la formule

$$(12) \quad S_i = R_i \int_\infty^\rho \frac{2n+1}{R_i^2} \frac{\rho \, d\rho}{-\sqrt{(\rho^2 - a^2)(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}} = R_i \int_0^u \frac{2n+1}{R_i^2} \, du,$$

u étant une nouvelle variable, liée à ρ par la relation

$$du = \frac{-\rho \, d\rho}{\sqrt{(\rho^2 - a^2)(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}}.$$

Le potentiel de l'ellipsoïde homogène de densité 1,

$$\frac{x^2}{R_1^{02}} + \frac{y^2}{R_2^{02}} + \frac{z^2}{R_3^{02}} - 1 = 0$$

s'exprime par

$$V = -\frac{T}{2}\left[\frac{S_1}{R_1}x^2 + \frac{S_2}{R_2}y^2 + \frac{S_3}{R_3}z^2\right] + \text{const.} \tag{13}$$

Le potentiel de la couche homogène de densité 1, répandue sur l'ellipsoïde et d'épaisseur

$$\zeta = l\Sigma\beta_k M_k N_k$$

est

$$\left\{\begin{array}{l}
\text{à la surface} \\
V'_0 = \sum \frac{4\pi}{2n+1}\beta_k R_k^0 S_k^0 M_k N_k; \\
\text{à l'intérieur} \\
V'_i = \sum \frac{4\pi}{2n+1}\beta_k S_k^0 R_k M_k N_k; \\
\text{à l'extérieur} \\
V'_e = \sum \frac{4\pi}{2n+1}\beta_k R_k^0 S_k M_k N_k.
\end{array}\right. \tag{14}$$

Et enfin, désignant par g la pesanteur sur l'ellipsoïde en rotation et en équilibre relatif, nous avons les formules

$$gl = \frac{4}{3}\pi R_1^0 S_1^0 = \text{const.}, \tag{15}$$

$$g = -\frac{\partial U}{\partial n}, \tag{16}$$

U étant la fonction des forces.

Ajoutons ici encore une formule que j'ai donnée dans le numéro de juin 1915 des *Nouvelles Annales de Mathématiques*.

Avec les notations indiquées, la courbure moyenne de l'ellipsoïde est donnée par la formule suivante :

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = -R_1R_2R_3\frac{R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 - x^2 - y^2 - z^2}{\left(\frac{R_2^2R_3^2}{R_1^2}x^2 + \frac{R_3^2R_1^2}{R_2^2}y^2 + \frac{R_1^2R_2^2}{R_3^2}z^2\right)^{\frac{3}{2}}}. \tag{17}$$

2° *Énoncé du problème. Hypothèses.* — Imaginons une masse liquide homogène en rotation uniforme autour d'un axe fixe (que nous

prenons pour axe OX) et qui, étant en équilibre relatif, affecte la figure d'un ellipsoïde E_0.

Ajoutons maintenant à la surface de cet ellipsoïde une pression capillaire, c'est-à-dire une faible pression superficielle, proportionnelle à la courbure moyenne de la surface. Cette pression capillaire déformera la figure ellipsoïdale; et nous obtiendrons cette déformation en ajoutant à la surface de l'ellipsoïde une couche liquide infiniment mince, d'épaisseur ζ, tantôt positive, tantôt négative. La masse totale de cette couche doit évidemment être nulle. Nous supposons encore que cette déformation étant infiniment petite, la courbure moyenne de la surface reste la même fonction des angles polaires.

Si la nouvelle figure est une figure d'équilibre, les conditions d'équilibre s'écriront :

$$(18)\qquad \left\{\begin{array}{l} \text{à l'intérieur de la surface} \\ \qquad p = U + \text{const.}, \\ \text{à la surface} \\ \quad p_0 = \alpha = U_0 + \text{const.}, \end{array}\right.$$

U étant la fonction des forces et α la pression capillaire.

Pour résoudre le problème, nous développerons α et U_0 qui est une fonction de ζ, en une série de fonctions de Lamé; après quoi, identifiant les coefficients, nous calculerons ζ qui nous montrera en quoi la nouvelle figure diffère de l'ellipsoïde.

3° *Résolution du problème.* — Comme nous l'avons vu tout à l'heure, il nous faut, pour résoudre notre problème, développer en série de produits de Lamé U_0 et α, U_0 étant la fonction des forces à la surface de la couche et α étant la pression capillaire.

Or, U_0 se compose de deux parties

$$U_0 = U_E + v,$$

où U_E est la fonction des forces due à l'ellipsoïde, mais à la surface de la couche et v est le potentiel de la couche ajoutée. Mais, désignant par U_E^0 la fonction des forces due à l'ellipsoïde et à sa surface, nous

verrons que, négligeant le carré de ζ,

$$U_E = U_E^0 + \frac{\partial U_E^0}{\partial n}\zeta,$$

ou en tenant compte de la formule (16)

$$U_E = U_E^0 - g\zeta. \tag{19}$$

Enfin,

$$U_0 = U_E + v = U_E^0 - g\zeta + v.$$

Par conséquent, la condition (18) s'écrira

$$\alpha = U_E^0 - g\zeta + v + \text{const.}$$

et comme U_E^0 est constant, car l'ellipsoïde était une figure d'équilibre, nous aurons définitivement la condition suivante :

$$-g\zeta + v = \alpha + \text{const.} \tag{20}$$

Comme ζ doit être une fonction de μ et ν, ainsi que l, nous nous représenterons la fonction $\zeta : l$ sous la forme de la série

$$\frac{\zeta}{l} = \Sigma a_i M_i N_i,$$

et, par conséquent, nous chercherons ζ sous la forme

$$\zeta = l \Sigma a_i M_i N_i. \tag{21}$$

Le problème consiste dans la recherche des coefficients a_i.

Reprenant l'équation (20), nous aurons

$$g\zeta = gl\Sigma a_i M_i N_i = \frac{4}{3}\pi R_1^0 S_1^0 \Sigma a_i M_i N_i,$$

d'après la formule (15).

Le potentiel v de la couche sera, d'après la formule (14),

$$v = \sum \frac{4\pi}{2n+1} a_i R_i^0 S_i^0 M_i N_i$$

et, par suite,

$$-g\zeta + v = -4\pi \sum \left(\frac{R_1^0 S_1^0}{3} - \frac{R_i^0 S_i^0}{2n+1}\right) a_i M_i N_i.$$

Si, enfin, nous développons α en série de produits de Lamé,

$$\alpha = \Sigma c_i M_i N_i.$$

l'équation (20) devient [en effaçant les indices (°)]

$$-4\pi \sum \left(\frac{R_1 S_1}{3} - \frac{R_i S_i}{2n+1}\right) a_i M_i N_i = \Sigma c_i M_i N_i.$$

L'identification des coefficients donne finalement

$$(22) \qquad a_i = \frac{-c_i}{4\pi\left(\frac{R_1 S_1}{3} - \frac{R_i S_i}{2n+1}\right)}.$$

Ainsi nous avons ramené notre problème au développement en série de produits de Lamé d'une fonction donnée α. Mais ce développement se ramène de son côté au calcul des coefficients c_i qui, d'après la formule (11), seront donnés par la formule

$$(23) \qquad c_i = \frac{\int\int \alpha M_i N_i l \, d\sigma}{\int\int (M_i N_i)^2 l \, d\sigma}.$$

4° *Coordonnées polaires.* — Pour calculer ces intégrales nous prendrons pour nouvelles variables les angles polaires θ et φ. Comme nous avons pris pour axe de rotation l'axe OX, nous poserons

$$(24) \qquad \begin{cases} x = R_1 \cos\theta, \\ y = R_2 \sin\theta \sin\varphi, \\ z = R_3 \sin\theta \cos\varphi. \end{cases}$$

Nous savons que, désignant par f la tension superficielle, la pression capillaire sera donnée par la formule

$$\alpha = f\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right),$$

qui, d'après la formule (17) et en posant $-f.R_1 R_2 R_3 = \varepsilon$, s'écrit

$$(25) \quad \alpha = \varepsilon \frac{R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 - R_1^2 \cos^2\theta - R_2^2 \sin^2\theta \sin^2\varphi - R_3^2 \sin^2\theta \cos^2\varphi}{(R_2^2 R_3^2 \cos^2\theta + R_3^2 R_1^2 \sin^2\theta \sin^2\varphi + R_1^2 R_2^2 \sin^2\theta \cos^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}.$$

En tenant compte des formules (9) et de ce que

$$\cos^2(n, x) + \cos^2(n, y) + \cos^2(n, z) = 1,$$

la même formule s'écrira

$$\alpha = \varepsilon(R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 - R_1^2 \cos^2\theta - R_2^2 \sin^2\theta \sin^2\varphi - R_3^2 \sin^2\theta \cos^2\varphi)\, l^3.$$

La comparaison de ces deux formules nous donne l'expression pour l :

$$(26) \qquad l = (R_2^2 R_3^2 \cos^2\theta + R_3^2 R_2^2 \sin^2\theta \sin^2\varphi + R_1^2 R_2^2 \sin^2\theta \cos^2\varphi)^{-\frac{1}{2}}.$$

La différentiation des formules (24) nous donne

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial \theta} &= -R_1 \sin\theta, & \frac{\partial x}{\partial \varphi} &= 0,\\
\frac{\partial y}{\partial \theta} &= R_2 \cos\theta \sin\varphi, & \frac{\partial y}{\partial \varphi} &= R_2 \sin\theta \cos\varphi,\\
\frac{\partial z}{\partial \theta} &= R_3 \cos\theta \cos\varphi, & \frac{\partial z}{\partial \varphi} &= -R_3 \sin\theta \sin\varphi.
\end{aligned}$$

Désignant, comme on fait toujours, par

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 = R_1^2 \sin^2\theta + R_2^2 \cos^2\theta \sin^2\varphi + R_3^2 \cos^2\theta \cos^2\varphi,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\partial z}{\partial \varphi} = (R_2^2 - R_3^2) \sin\theta \cos\theta \sin\varphi \cos\varphi,$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2 = R_2^2 \sin^2\theta \cos^2\varphi + R_3^2 \sin^2\theta \sin^2\varphi,$$

et portant ces valeurs dans la formule classique,

$$d\sigma = \sqrt{EG - F^2}\, d\theta\, d\varphi,$$

nous aurons

$$d\sigma = \sin\theta \sqrt{R_2^2 R_3^2 \cos^2\theta + R_3^2 R_1^2 \sin^2\theta \sin^2\varphi + R_1^2 R_2^2 \sin^2\theta \cos^2\varphi}\, d\theta\, d\varphi.$$

Multipliant tout par l et en tenant compte de (26), nous aurons finalement

$$l\, d\sigma = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi;$$

ce qui nous donnera l'expression suivante pour les coefficients c_i :

$$(27)\qquad c_i = \frac{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \alpha M_i N_i \sin\theta\, d\theta}{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} (M_i N_i)^2 \sin\theta\, d\theta}.$$

Calculons maintenant les produits de Lamé $M_i N_i$. En comparant les formules (24) avec les formules (3) et (7), nous aurons

$$M_1 N_1 = \frac{1}{h_1}\cos\theta,$$

$$M_2 N_2 = \frac{1}{h_2}\sin\theta\,\sin\varphi,$$

$$M_3 N_3 = \frac{1}{h_3}\sin\theta\cos\varphi,$$

$$M_4 N_4 = \frac{1}{h_2}\,\frac{1}{h_3}\sin^2\theta\,\sin\varphi\cos\varphi = \frac{1}{2h_4}\sin^2\theta\,\sin 2\varphi,$$

$$M_5 N_5 = \frac{1}{h_3}\,\frac{1}{h_1}\sin\theta\,\cos\theta\cos\varphi = \frac{1}{2h_5}\sin 2\theta\cos\varphi,$$

$$M_6 N_6 = \frac{1}{h_1}\,\frac{1}{h_2}\cos\theta\,\sin\theta\,\sin\varphi = \frac{1}{2h_6}\sin 2\theta\,\sin\varphi,$$

$$(28)\quad \begin{cases} M_7 N_7 = (\mu^2-\alpha_1)(\nu^2-\alpha_1) = h_7\left[\dfrac{x^2}{\alpha_1-a^2}+\dfrac{y^2}{\alpha_1-b^2}+\dfrac{z^2}{\alpha_1-c^2}-1\right], \\ M_8 N_8 = (\mu^2-\alpha_2)(\nu^2-\alpha_2) = h_8\left[\dfrac{x^2}{\alpha_2-a^2}+\dfrac{y^2}{\alpha_2-b^2}+\dfrac{z^2}{\alpha_2-c^2}-1\right], \end{cases}$$

où l'on pose

$$(29)\quad h_7 = \frac{(\alpha_1-a^2)(\alpha_1-b^2)(\alpha_1-c^2)}{\rho^2-\alpha_1},\qquad h_8 = \frac{(\alpha_2-a^2)(\alpha_2-b^2)(\alpha_2-c^2)}{\rho^2-\alpha_2},$$

et où α_1 et α_2 sont les racines de l'équation (5). Enfin

$$M_9 N_9 = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\cos\theta\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi = \frac{1}{4h_9}\sin\theta\sin 2\theta\sin 2\varphi$$

et ainsi de suite.

En général, nous aurons huit espèces de produits de Lamé. Il est facile de les former. Désignant par Π le produit figurant dans la for-

mule (2), nous aurons ces huit espèces :

1° $MN = \Pi,$

2° $MN = M_1 N_1 \Pi,$

3° $MN = M_2 N_2 \Pi,$

4° $MN = M_3 N_3 \Pi,$

5° $MN = M_4 N_4 \Pi,$

6° $MN = M_5 N_5 \Pi,$

7° $MN = M_6 N_6 \Pi,$

8° $MN = M_9 N_9 \Pi.$

5° *Calcul des coefficients c_i.* — Remarquant que α et Π sont des fonctions de $\cos^2\theta$ et de $\cos^2\varphi$ et que, par conséquent, elles reprennent les mêmes valeurs lorsque θ ou φ varie de o à $\frac{\pi}{2}$ et de $\frac{\pi}{2}$ à π, nous voyons que l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \alpha M_i N_i \sin\theta \, d\theta$$

ne diffère de zéro que lorsque $M_i N_i$ est de la première espèce, c'est-à-dire que lorsqu'il est de la forme

$$M_i N_i = \prod_k \left(\frac{x^2}{\alpha_k - a^2} + \frac{y_2}{\alpha_k - b^2} + \frac{z^2}{\alpha_k - c^2} - 1 \right).$$

Cela montre que nous n'aurons de termes non nuls dans notre développement que pour n pair, et que, pour chaque degré n pair, nous aurons n termes non nuls. Ainsi, pour $n = 2$, nous aurons les termes avec les coefficients c_7 et c_8. Comme tous les termes de notre développement sont infiniment petits, nous nous bornerons aux termes relatifs à $n = 2$ et nous prendrons approximativement

$$\alpha = c_0 + c_7 M_7 N_7 + c_8 M_8 N_8,$$

et, par suite, nous chercherons ζ sous la forme

$$\zeta = a_7 l M_7 N_7 + a_8 l M_8 N_8. \tag{30}$$

Si nous posons

$$A_i = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} (M_i N_i)^2 \sin\theta \, d\theta, \tag{31}$$

la formule (27) nous donnera les expressions pour c_7 et c_8,

$$(32)\qquad c_7 = \frac{\varepsilon h_7}{A_7} I_1, \qquad c_8 = \frac{\varepsilon h_8}{A_8} I_2,$$

où l'on pose

$$(33)\quad I_1 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \frac{R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 - R_1^2\cos^2\theta - R_2^2\sin^2\theta\sin^2\varphi - R_3^2\sin^2\theta\cos^2\varphi}{[R_2^2R_3^2\cos^2\theta + R_3^2R_1^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + R_1^2R_2^2\sin^2\theta\cos^2\varphi]^{\frac{3}{2}}}$$
$$\times\left[\frac{R_1^2\cos^2\theta}{\alpha_1 - a^2} + \frac{R_2^2\sin^2\theta\sin^2\varphi}{\alpha_2 - b^2} + \frac{R_3^2\sin^2\theta\cos^2\varphi}{\alpha_1 - c^2} - 1\right]\sin\theta\, d\theta.$$

On obtient I_2 en changeant α_1 en α_2; α_1 et α_2 étant les racines de l'équation (5).

Comme le calcul complet est extrêmement difficile, et comme nous ne voulons que déterminer dans quel sens la pression capillaire modifie la figure ellipsoïdale, il nous suffira de connaître le signe de a_7 et a_8. Voilà pourquoi nous nous bornons à déterminer les signes de I_1 et I_2.

6° *Signe de* I_1. — Posant $R_3 = R_2$, ce qui entraîne $b^2 = c^2$, nous aurons

$$\underset{R_2=R_3}{I_1} = I'_1 = \frac{2\pi}{R_2^3}\int_0^{\pi} \frac{(R_2^2 + R_1^2) + (R_2^2 - R_1^2)\cos^2\theta}{[R_1^2 + (R_2^2 - R_1^2)\cos^2\theta]^{\frac{3}{2}}}$$
$$\times\left[\frac{R_1^2\cos^2\theta}{\alpha_1 - a^2} + \frac{R_2^2\sin^2\theta}{\alpha_1 - b^2} - 1\right]\sin\theta\, d\theta.$$

Posant $\cos\theta = x$, nous prenons pour nouvelle variable

$$z = \sqrt{R_1^2 + (R_2^2 - R_1^2)x^2} - \sqrt{R_2^2 - R_1^2}\,x.$$

Et, remarquant que pour $b = c$ l'équation (5) devient

$$\frac{1}{\alpha - a^2} + \frac{2}{\alpha - b^2} = 0,$$

ce qui donne

$$\alpha_1 = \frac{1}{3}(2a^2 + b^2), \qquad (\alpha_1 - a^2) = -\frac{1}{3}(R_2^2 - R_1^2), \qquad (\alpha_1 - b^2) = \frac{2}{3}(R_2^2 - R_1^2),$$

nous aurons

$$I'_1 = -\frac{\pi(R_2^2 + 2R_1^2)}{4R_2^3(R_2^2 - R_1^2)^{\frac{5}{2}}}\int_{R_2+\sqrt{R_2^2-R_1^2}}^{R_2-\sqrt{R_2^2-R_1^2}} \frac{4R_2^2z^2 + (R_1^2 + z^2)^2}{(R_1^2 + z^2)^2}\,\frac{4(R_2^2 - R_1^2)z^2 - 3(R_1^2 - z^2)^2}{z^2}\,\frac{dz}{z}.$$

Enfin, posant $y = z^2$, nous obtenons la formule définitive

$$I'_1 = -\frac{\pi(R_2^2+2R_1^2)}{8R_2^3(R_2^2-R_1^2)^{\frac{5}{2}}}\int_{(R_2+\sqrt{R_2^2-R_1^2})^2}^{(R_2-\sqrt{R_2^2-R_1^2})^2}\frac{[4R_2^2y+(R_1^2+y)^2][4(R_2^2+2R_1^2)y-3(R_1^2+y)^2]}{(R_1^2+y)^2y^2}dy.$$

L'intégration s'effectue par la décomposition de la fonction sous l'intégrale en fractions simples. Effectuant cette intégration, on trouve :

$$I'_1 = \frac{8\pi(R_2^2+2R_1^2)(4R_2^2-R_1^2)}{R_2^3(R_2^2-R_1^2)^{\frac{3}{2}}}\left[\frac{2(R_2^2+R_1^2)R_2\sqrt{R_2^2-R_1^2}}{(4R_2^2-R_1^2)R_1^2} - lg\frac{R_2+\sqrt{R_2^2-R_1^2}}{R_1}\right],$$

et, désignant la quantité entre crochets par Φ, on a

$$I'_1 = \frac{8\pi(R_2^2+2R_1^2)(4R_2^2-R_1^2)}{R_2^3(R_2^2-R_1^2)^{\frac{3}{2}}}\Phi.$$

Introduisons maintenant le rapport des axes

$$\frac{R_2}{R_1} = k > 1$$

et nous aurons

$$\Phi = \frac{(2k^3+k)\sqrt{k^2-1}}{4k^2-1} - lg(k+\sqrt{k^2-1}). \tag{34}$$

La dérivation donne

$$\frac{d\Phi}{dk} = \frac{16k^2(k^2-1)^2}{(4k^2-1)^2\sqrt{k^2-1}} > 0.$$

Par conséquent, Φ étant nulle pour $k = 1$, elle reste toujours positive pour $k > 1$ et devient infinie comme k^2 pour $k = \infty$. Et comme I_1 ne diffère de Φ que par un facteur positif, nous voyons que I'_1 est toujours positive.

Par conséquent, comme

$$I'_1 = \lim_{R_3 = R_2} I_1,$$

nous pouvons affirmer que I_1 est positive au moins pour les valeurs de R_3 voisines de R_2.

Pour savoir comment se comporte I_1 lorsque le rapport $\frac{R_3}{R_2}$ devient

très grand, écrivons

$$I_1 = R_3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \frac{\frac{R_1^2}{R_3^2} + \frac{R_2^2}{R_3^2} + 1 - \frac{R_1^2}{R_3^2}\cos^2\theta - \frac{R_2^2}{R_3^2}\sin^2\theta\sin^2\varphi - \sin^2\theta\cos^2\varphi}{\left[R_2^2\cos^2\theta + R_1^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + \frac{R_1^2 R_2^2}{R_3^2}\sin^2\theta\cos^2\varphi\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$\times \left[\frac{\frac{R_1^2}{R_3^2}\cos^2\theta}{\alpha_1 - a^2} + \frac{\frac{R_2^2}{R_3^2}\sin^2\theta\sin^2\varphi}{\alpha_1 - b_2} + \frac{\sin^2\theta\cos^2\varphi}{\alpha_1 - c_2} - \frac{1}{R_3^2}\right] \sin\theta\, d\theta.$$

Laissons maintenant R_1 et R_2 invariables, mais faisons croître R_3 au delà de toute limite. Nous aurons,

$$\lim_{R_3=\infty} I_1 = \lim_{R_3=\infty} \frac{R_3}{\alpha_1 - c^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \frac{(1 - \sin^2\theta\cos^2\varphi)\sin^2\theta\cos^2\varphi}{[R_2^2\cos^2\theta + R_1^2\sin^2\theta\sin^2\varphi]^{\frac{3}{2}}} \sin\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{R_3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \frac{(1 - \sin^2\theta\cos^2\varphi)\sin^2\theta\cos^2\varphi}{[R_2^2\cos^2\theta + R_1^2\sin^2\theta\sin^2\varphi]^{\frac{3}{2}}} \sin\theta\, d\theta.$$

On voit ainsi que, l'intégrale étant finie et positive, I_1 s'annule comme $\frac{1}{R_3}$ pour R_3 très grand, mais reste toujours positive.

7° *Signe de* I_2. — Écrivons pour abréger

$$I_2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} F.P \sin\theta\, d\theta\, d\varphi,$$

où nous posons

$$F = \frac{R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 - R_1^2\cos^2\theta - R_2^2\sin^2\theta\sin^2\varphi - R_3^2\sin^2\theta\cos^2\varphi}{[R_2^2 R_3^2\cos^2\theta + R_3^2 R_1^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + R_1^2 R_2^2\sin^2\theta\cos^2\varphi]^{\frac{3}{2}}},$$

$$P = \frac{R_1^2\cos^2\theta}{\alpha_2 - a^2} + \frac{R_2^2\sin^2\theta\sin^2\varphi}{\alpha_2 - b^2} + \frac{R_3^2\sin^2\theta\cos^2\varphi}{\alpha_2 - c^2} - 1;$$

on voit que F est une fonction essentiellement positive.

Pour trouver le signe de I_2, calculons sa valeur au voisinage de $R_2 = R_3$. Dans ce but, posons

$$R_2^2 = R_3^2 + \varepsilon^2,$$

ce qui demande $c^2 = b^2 - \varepsilon^2$.

Alors il faut poser

$$\alpha_2 = b^2 - \lambda\varepsilon^2$$

et l'équation (5) devient

$$(35) \qquad \frac{1}{b^2 - a^2 - \lambda\varepsilon^2} + \frac{1}{-\lambda\varepsilon^2} + \frac{1}{(1-\lambda)\varepsilon^2} = 0.$$

D'où, pour la première approximation on peut prendre $\lambda = \frac{1}{2}$.

Portant la valeur de α_2 dans P, on obtient

$$P = \frac{R_1^2 \cos^2\theta}{b^2 - a^2 - \lambda\varepsilon^2} + \frac{R_2^2 \sin^2\theta \sin^2\varphi}{-\lambda\varepsilon^2} + \frac{(R_2^2 + \varepsilon^2)\sin^2\theta\cos^2\varphi}{(1-\lambda)\varepsilon^2} - 1.$$

Remplaçant $\frac{1}{-\lambda\varepsilon^2}$ par sa valeur tirée de (35), on a

$$P = \frac{R_1^2\cos^2\theta}{b^2 - a^2 - \lambda\varepsilon^2} + \frac{R_2^2\sin^2\theta}{(1-\lambda)\varepsilon^2}[\cos^2\varphi - \sin^2\varphi]$$
$$- \frac{R_2^2\sin^2\theta\sin^2\varphi}{b^2 - a^2 - \lambda\varepsilon^2} + \frac{\sin^2\theta\cos^2\varphi}{1-\lambda} - 1$$

ou enfin, exprimant $\sin^2\varphi$ et $\cos^2\varphi$ en fonction de $\cos 2\varphi$,

$$P = \frac{-R_1^2\cos^2\theta}{a^2 - b^2 + \lambda\varepsilon^2} + \frac{R_2^2\sin^2\theta}{2(a^2 - b^2 + \lambda\varepsilon^2)} + \frac{\sin^2\theta}{2(1-\lambda)} - 1$$
$$+ \sin^2\theta\left[\frac{R_2^2}{(1-\lambda)\varepsilon^2} - \frac{R_2^2}{2(a^2 - b^2 + \lambda\varepsilon^2)} + \frac{1}{2(1-\lambda)}\right]\cos 2\varphi.$$

En tenant compte de ce que, pour $R_2 = R_3$, la fonction F ne dépend pas de φ, les termes en $\cos 2\varphi$ s'annuleront après l'intégration par rapport à φ, et nous aurons

$$\lim_{R_2 = R_3} I_2 = 2\pi \int_0^\pi \lim_{R_2 = R_3} F\left[\frac{R_2^2\sin^2\theta - 2R_1^2\cos^2\theta}{2(a^2 - b^2 + \lambda\varepsilon^2)} + \frac{\sin^2\theta}{2(1-\lambda)} - 1\right]\sin\theta\, d\theta.$$

Remplaçons, maintenant, λ par $\frac{1}{2}$ et ε par 0, et nous aurons finalement

$$I_2' = \lim_{R_2 = R_3} I_2 = \frac{2\pi R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}\int_0^\pi \frac{(R_2^2 + R_1^2) + (R_2^2 - R_1^2)\cos^2\theta}{R_2^3[R_1^2 + (R_2^2 - R_1^2)\cos^2\theta]^2}(1 - 3\cos^2\theta)\sin\theta\, d\theta.$$

Il est facile de vérifier que I_2' ne diffère de I_1' que par un facteur positif et que, par suite, I_2 est positive au moins au voisinage de $R_2 = R_3$.

Nous trouverons aussi que, pour R_3 infiniment grand par rapport à R_1 et R_2, I_2 devient nulle comme $\frac{1}{R_3}$.

En effet,

$$\lim_{R_3=\infty} I_2 = \lim_{R^3=\infty} \frac{R^3}{\alpha_2 - c^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \frac{(1-\sin^2\theta\cos^2\varphi)\sin^2\theta\cos^2\varphi}{[R_2^2\cos^2\theta + R_1^2\sin^2\theta\sin^2\varphi]^{\frac{3}{2}}} \sin\theta\, d\theta.$$

Mais, supposant dans (34) ε^2 très grand, on trouve pour λ la valeur approchée $\lambda = \frac{2}{3}$. Alors $\alpha_2^2 - c^2 = \frac{2}{3}\varepsilon^2$ et comme

$$\lim_{\varepsilon=\infty} \frac{R_3^2}{\varepsilon^2} = \lim_{\varepsilon=\infty} \frac{R_2^2 + \varepsilon^2}{\varepsilon^2} = 1,$$

nous aurons définitivement

$$\lim I_2 = \frac{2}{3R_3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \frac{(1-\sin^2\theta\cos^2\varphi)\sin^2\theta\cos^2\varphi}{[R_2^2\cos^2\theta + R_1^2\sin^2\theta\sin^2\varphi]^{\frac{3}{2}}} \sin\theta\, d\theta.$$

Par conséquent, les deux intégrales I_1 et I_2 sont positives au voisinage de $R_2 = R_3$ et s'annulent comme $\frac{1}{R_3}$ pour $R_3 = \infty$ (R_1 et R_2 restant finis). Mais comme F décroît constamment lorsque R_3 croît de R_2 à ∞ et s'annule comme $\frac{1}{R_3}$ pour $R_3 = \infty$, et que P est toujours une fonction dont la moyenne sur l'ellipsoïde est nulle, nous pouvons admettre que I_1 et I_2 étant égales à I_1' et I_2' pour $R_3 = R_2$ décroissent constamment lorsque R_3 croît de R_2 à ∞ et deviennent nulles pour $R_3 = \infty$ restant positives pour toutes les valeurs de R_3.

L'intégration assez longue, mais ne présentant aucune difficulté théorique nous donne les valeurs de A_7 et A_8 :

$$A_7 = \frac{8}{15}\pi(\rho^2 - \alpha_1)^2 \left[\frac{1}{(\alpha_1 - a^2)^2} + \frac{1}{(\alpha_1 - b^2)^2} + \frac{1}{(\alpha_1 - c^2)^2} + \frac{1}{(\rho^2 - \alpha_1)^2}\right],$$

$$A_8 = \frac{8}{15}\pi(\rho^2 - \alpha_2)^2 \left[\frac{1}{(\alpha_2 - a^2)^2} + \frac{1}{(\alpha_2 - b^2)^2} + \frac{1}{(\alpha_2 - c^2)^2} + \frac{1}{(\rho^2 - \alpha_2)^2}\right].$$

8° *Calcul de* ζ. — Cela posé, passons à ζ. Comme nous nous sommes borné à deux termes du développement, nous cherchons ζ

sous la forme

$$\zeta = a_7 l M_7 N_7 + a_8 l M_8 N_8.$$

Remplaçant tout par sa valeur, nous aurons

$$\zeta = \frac{f R_1 R_2 R_3}{4\pi} l \left[\frac{h_7^2 I_1}{A_7 \omega_7} \left(\frac{x^2}{\alpha_1 - a^2} + \frac{y^2}{\alpha_1 - b^2} + \frac{z^2}{\alpha_1 - c^2} - 1 \right) \right.$$
$$\left. + \frac{h_8^2 I_2}{A_8 \omega_8} \left(\frac{x^2}{\alpha_2 - a^2} + \frac{y^2}{\alpha_2 - b^2} + \frac{z^2}{\alpha_2 - c^2} - 1 \right) \right],$$

où l'on pose

$$\omega_7 = \frac{R_1 S_1}{3} - \frac{R_7 S_7}{5} = \int_\rho^\infty \left(\frac{\rho^2 - a^2}{x^2 - a^2} - \frac{\rho^2 - \alpha_1}{x^2 - \alpha_1} \right) \frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)(x^2 - c^2)}},$$

$$\omega_8 = \frac{R_1 S_1}{3} - \frac{R_8 S_8}{5} = \int_\rho^\infty \left(\frac{\rho^2 - a^2}{x^2 - a^2} - \frac{\rho^2 - \alpha_2}{x^2 - \alpha_2} \right) \frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)(x^2 - c^2)}}.$$

Comme $a^2 > \alpha_1 > \alpha_2$ et $x > \rho$, nous voyons que ω_7 et ω_8 sont négatives car tous les éléments de l'intégrale le sont. De plus nous avons vu que I_1 et I_2 sont positives et il est évident que l, h_7^2, h_8^2, A_7 et A_8 le sont aussi. Par conséquent le signe de ζ ne dépend que du signe des quantités entre les parenthèses.

9° *Discussion.* — On voit facilement que $h_8 = 0$, $a_8 = 0$ pour $R_3 = R_2$ et que par suite dans ce cas ζ se réduit à un seul premier terme. Pour R_3 très grand c'est le contraire, car c'est le second terme qui jouera le rôle principal.

En effet, posant comme avant

$$b^2 = c^2 + \varepsilon^2, \qquad \varepsilon^2 \text{ très grand},$$
$$a^2 = b^2 + k^2, \qquad k^2 \text{ fini } (k^2 = R_2^2 - R_1^2),$$

on a

$$\alpha_1 = b^2 + \lambda' k^2,$$

λ' étant donnée par l'équation

$$\frac{1}{(\lambda' - 1) k^2} + \frac{1}{\lambda' k^2} + \frac{1}{\lambda' k^2 + \varepsilon^2} = 0,$$

d'où la valeur approchée de λ' est $\lambda' = \frac{1}{2}$.

Ceci posé on trouve facilement

$$\lim h_7 = \lim_{\varepsilon^2=\infty} \frac{(\lambda-1)k^2\lambda k^2(\lambda k^2+\varepsilon^2)}{R_2^2-\lambda k} = \frac{(R_2^2-R_1^2)^2}{2(R_2^2+R_1^2)}\varepsilon^2,$$

$$\lim_{\varepsilon=\infty} A_7 = \lim_{\varepsilon=\infty} \frac{8}{15}\pi\left[\left(\frac{R_2^2-\lambda k^2}{(\lambda-1)k^2}\right)^2+\left(\frac{R_2^2-\lambda k^2}{\lambda k^2}\right)^2+\left(\frac{R_2^2-\lambda k^2}{\lambda k^2+\varepsilon^2}\right)^2-1\right]$$

$$= \frac{8}{15}\pi\frac{2R_1^2}{(R_2^2+R_1^2)^2}.$$

Et comme I_1 est de l'ordre de $\frac{1}{\varepsilon}$ pour $\varepsilon=\infty$, nous voyons que le coefficient $\frac{h_7^2 I_1}{A_7\omega_7}$ est de l'ordre de $\frac{\varepsilon^3}{\omega_7}$. De même on trouve

$$\lim_{\varepsilon=\infty} h_8 = \lim_{\varepsilon=\infty} \frac{\left(b^2-a^2-\frac{2}{3}\varepsilon^2\right)\left(-\frac{2}{3}\varepsilon^2\right)\left(\frac{1}{3}\varepsilon^2\right)}{R_3^2-\frac{1}{3}\varepsilon^2} = \frac{2}{9}\varepsilon^4,$$

$$\lim_{\varepsilon=\infty} A_8 = \frac{8}{15}\pi\lim_{\varepsilon=\infty}\left[\left(\frac{R_2^2-\frac{1}{3}\varepsilon^2}{b^2-a^2-\frac{2}{3}\varepsilon^2}\right)^2+\left(\frac{R_3^2-\frac{1}{3}\varepsilon^2}{-\frac{2}{3}\varepsilon^2}\right)^2+\left(\frac{R_3^2-\frac{1}{3}\varepsilon^2}{\frac{1}{3}\varepsilon^2}\right)^2-1\right] = \frac{4}{15}\pi.$$

Ainsi nous voyons que le coefficient $\frac{h_8^2 I_2}{A_8\omega_8}$ est de l'ordre de $\frac{\varepsilon^7}{\omega_8}$.

Et comme ω_7 et ω_8 sont du même ordre de grandeur que l'intégrale

$$\int_\rho^\infty \frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2-a^2)(x^2-b^2)(x^2-c^2)}},$$

on voit facilement que pour R_3 très grand, c'est le second terme qui joue le rôle principal.

Tout cela posé, nous pouvons discuter la nouvelle figure d'équilibre. Désignant par ζ_x, ζ_y et ζ_z l'épaisseur de la couche aux trois sommets de l'ellipsoïde, nous aurons

$$\zeta_x = \frac{fR_1}{4\pi}\left[\frac{h_7^2 I_1}{A_7\omega_7}\frac{(\rho^2-\alpha_1)}{(\alpha_1-a^2)}+\frac{h_8^2 I_2}{A_8\omega_8}\frac{(\rho^2-\alpha_2)}{(\alpha_2-a^2)}\right],$$

$$\zeta_y = \frac{fR_2}{4\pi}\left[\frac{h_7^2 I_1}{A_7\omega_7}\frac{(\rho^2-\alpha_1)}{(\alpha_1-b^2)}+\frac{h_8^2 I_2}{A_8\omega_8}\frac{(\rho^2-\alpha_2)}{(\alpha_2-b^2)}\right],$$

$$\zeta_z = \frac{fR_3}{4\pi}\left[\frac{h_7^2 I_1}{A_7\omega_7}\frac{(\rho^2-\alpha_1)}{(\alpha_1-c^2)}+\frac{h_8^2 I_2}{A_8\omega_8}\frac{(\rho^2-\alpha_2)}{(\alpha_2-c^2)}\right].$$

Remarquant que

$$\alpha_1 - a^2 < 0, \qquad \alpha_1 - b^2 > 0, \qquad \alpha_1 - c^2 > 0,$$
$$\alpha_2 - a^2 < 0, \qquad \alpha_2 - b^2 < 0, \qquad \alpha_2 - c^2 > 0$$

et rappelant que ω_7 et ω_8 sont négatifs, nous verrons que sur le petit axe (OX) ζ est toujours positive. Sur l'axe moyen (OY) elle est négative pour l'ellipsoïde voisin de l'ellipsoïde de révolution et devient positive pour l'ellipsoïde assez allongé. Enfin, sur le grand axe (OZ) ζ est toujours négative. Par conséquent, quel que soit l'ellipsoïde, la pression capillaire tend à le faire approcher de la sphère.

Il est facile de vérifier que pour les ellipsoïdes infiniment minces ou infiniment allongés, les expressions de ζ deviennent infiniment grandes ce qui montre que, si petite que soit la tension superficielle, les figures infiniment minces ou infiniment allongées sont impossibles comme figures d'équilibre. Ce résultat est tout à fait évident, car pour ces figures la courbure moyenne devient infiniment grande en certains points et, si petite que soit la constante de la tension superficielle, la pression capillaire peut devenir aussi grande que l'on voudra.

10° *Ellipsoïde de révolution.* — Pour l'ellipsoïde de révolution il faut poser $R_2 = R_3$ dans toutes les formules précédentes. De cette manière on aura

$$\alpha = \varepsilon \frac{(R_2^2 + R_1^2) + (R_2^2 - R_1^2)\cos^2\theta}{R_2^3\,[R_1^2 + (R_2^2 - R_1^2)\cos^2\theta]^{\frac{3}{2}}},$$

$$l = 1 : R_2\sqrt{R_1^2 + (R_2^2 - R_1^2)\cos^2\theta},$$

$$h_7 = -\frac{4}{9}\,\frac{(R_2^2 - R_1^2)^3}{2R_1^2 + R_2^2},$$

$$M_7N_7 = -\frac{2}{9}(R_2^2 - R_1^2)^2(1 - 3\cos^2\theta),$$

$$A_7 = \frac{4\pi}{15}\,\frac{R_2^4 + 16R_1^2R_2^2 + 10R_1^4}{(R_2^2 - R_1^2)^2},$$

$$\omega_7 = \frac{R_1S_1}{3} - \frac{R_7S_7}{5} = \int_\rho^\infty \left(\frac{\rho^2 - a^2}{x^2 - a^2} - \frac{\rho^2 - \alpha_1}{x^2 - \alpha_1}\right)\frac{x\,dx}{(x^2 - b^2)\sqrt{x^2 - a^2}},$$

$$a_7 = -\frac{\varepsilon h_7 I_1'}{4\pi\omega_7 A_7}, \qquad a_8 = 0.$$

et enfin

$$\zeta = -\delta \frac{1 - 3\cos^2\theta}{\sqrt{R_1^2 + (R_2^2 - R_1^2)\cos^2\theta}},$$

où l'on pose

$$\delta = \frac{f R_1 R_2 h_7 \frac{2}{3}(R_2^2 - R_1^2)^2}{4\pi\omega_7 A_7}$$

qui est un petit facteur positif, constant sur l'ellipsoïde. On voit ainsi que ζ est positif, autour de l'axe de rotation et négatif autour de l'équateur. Posant $\theta = 0$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$, on verra que sur le pôle

$$\zeta_p = \frac{2\delta}{R_2}$$

et sur l'équateur

$$\zeta_e = \frac{\delta}{R_1}.$$

La nouvelle figure restant de révolution devient moins aplatie : elle se rapproche de la sphère.

Le rapport

$$\frac{|\zeta_e|}{\zeta_p} = \frac{R_2}{2R_1}$$

croît avec l'aplatissement de l'ellipsoïde et devient infiniment grand lorsque l'ellipsoïde devient infiniment mince. Il est facile de s'assurer que pour cette figure δ devient infiniment grand. En effet, posant

$$k = \frac{R^2}{R_1},$$

on aura

$$\delta = B \frac{R_1^7 (k^2 - 1)^{\frac{9}{2}} (4k^2 - 1)}{(k^5 - 16k^3 + 10k)\omega_7} \Phi.$$

B étant un facteur numérique et Φ la fonction donnée par la formule (34), nulle pour $k = 1$, et infinie comme k^2, pour $k = \infty$. On voit ainsi que $\delta = 0$ pour la sphère ($k = 1$) et devient infini pour les ellipsoïdes infiniment plats.

Un calcul absolument analogue donne les mêmes résultats pour un

cylindre elliptique : sous l'action de la pression capillaire, un cylindre elliptique devient moins aplati.

11° *Conclusion.* — Nous avons vu que, quelle que soit la figure ellipsoïdale d'équilibre d'une masse liquide en rotation, la pression capillaire tend à l'arrondir. Cela tient à ce que la pression capillaire est d'autant plus grande que les parties de la figure sont plus saillantes. Par conséquent, il est très probable que la pression capillaire produira le même effet sur une surface quelconque (non ellipsoïdale) et d'autre part, si l'on imagine une pression non capillaire, mais d'autant plus grande que la partie de la figure est plus saillante, nous pouvons nous attendre à ce qu'elle produise le même effet, c'est-à-dire qu'elle tende à arrondir la surface. Par conséquent, on peut s'attendre à ce qu'un effet semblable soit produit par une membrane élastique, tendue à la surface du liquide (ce que j'espère démontrer ultérieurement).

Pour faire application des résultats obtenus, imaginons une planète à l'état encore liquide. Cette planète n'étant pas composée d'un liquide homogène, affectera une figure d'équilibre non ellipsoïdale (comme cela a été montré par M. Hamy dans sa thèse de doctorat). La planète en se refroidissant formera à sa surface une croûte plus ou moins épaisse. Cette croûte, avant de se solidifier complètement, et même solide, restera dans un état plus ou moins élastique et présentera une sorte de membrane élastique tendue à la surface de la planète. Comme nous l'avons vu, une pareille membrane tendra à arrondir notre planète. Et je me demande : ne pourrions-nous pas y voir une des causes qui font que toutes les planètes sont moins aplaties qu'elles ne le devraient être d'après les formules relatives à une masse liquide homogène et sans pression capillaire?

TROISIEME PARTIE.

Figures d'équilibre d'une masse liquide en rotation sous l'action des seules forces capillaires.

1° *Énoncé du problème.* — Imaginons une masse liquide soumise uniquement à des forces capillaires, qui tourne autour d'un axe fixe (que nous prenons pour axe OZ) avec une vitesse angulaire constante ω, et cherchons les figures d'équilibre que pourra affecter cette masse.

Les seules forces agissant sur les éléments de masse de notre liquide sont les forces centrifuges, dont le potentiel est, en appelant ρ la densité,

$$\frac{\rho\omega^2}{2}(x^2+y^2).$$

Quant aux forces capillaires, elles ne donneront qu'une pression superficielle, proportionnelle à la courbure moyenne de la surface et qui a, par conséquent, l'expression suivante

$$\alpha = f\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right),$$

f étant la tension superficielle et R, R′ les rayons principaux de courbure de la surface. Ceci posé, nous voyons que dans notre cas les conditions d'équilibre sont :

A l'intérieur du liquide,

$$(1) \qquad p = \frac{\rho\omega^2}{2}(x^2+y^2)+K;$$

à la surface libre,

$$p_0 = \frac{\rho\omega^2}{2}(x_0^2+y_0^2)+K = f\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)+H,$$

p étant la pression dans le sens ordinaire du mot, K une constante et H la pression extérieure constante.

Si nous écrivons la dernière condition sous la forme

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = a(x^2 + y^2) + b, \tag{2}$$

en posant

$$a = \frac{\rho\omega^2}{2f}, \qquad b = \frac{K - H}{f},$$

nous aurons une équation différentielle qui déterminera la surface cherchée. Le problème consiste donc dans l'intégration de cette équation.

Il est facile de remarquer, d'après la formule (1), que les surfaces d'égale pression sont des cylindres de révolution autour de l'axe OZ. Par conséquent, les surfaces les plus réalisables sont celles de révolution. C'est de ces surfaces que je m'occuperai au cours de ce Mémoire.

2° *Résolution du problème.* — Comme la surface est de révolution il nous suffira, pour la connaître, de trouver l'équation de sa ligne méridienne.

Posant

$$r^2 = x^2 + y^2,$$

nous chercherons cette équation sous la forme

$$z = f(r).$$

Nous savons que, pour des surfaces de révolution, un des rayons principaux de courbure se réduit au rayon de courbure de la ligne méridienne et l'autre à la longueur de la normale, tracée jusqu'à la rencontre avec l'axe de rotation. Ainsi l'équation (2) s'écrit

$$\frac{z''}{(1 + z'^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{z'}{r(1 + z'^2)^{\frac{1}{2}}} = ar^2 + b.$$

Multipliant par rdr et remarquant que

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{rz'}{(1 + z'^2)^{\frac{1}{2}}}\right] = \frac{z''r}{(1 + z'^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{z'}{(1 + z'^2)^{\frac{1}{2}}},$$

nous intégrons une première fois et obtenons

$$\frac{rz'}{(1+z'^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{ar^4}{4} + \frac{br^2}{2} + c$$

et finalement

$$(3) \qquad \frac{z'}{(1+z'^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{ar^3}{4} + \frac{br}{2} + \frac{c}{r},$$

c étant une constante d'intégration.

Désignant par φ l'angle entre la tangente et l'axe Or, nous aurons

$$(4) \qquad \operatorname{tang}\varphi = z' = \frac{ar^4 + 2br^2 + 4c}{\pm\sqrt{16r^2 - (ar^4 + 2br^2 + 4c)^2}},$$

$$(5) \qquad \sin\varphi = \frac{z'}{(1+z'^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{ar^3}{4} + \frac{br}{2} + \frac{c}{r} = \frac{1}{4r}(ar^4 + 2br^2 + 4c).$$

On voit que r ne peut varier qu'entre certaines limites. De plus, si la constante c n'est pas nulle, r ne peut jamais s'annuler, ce qui prouve que dans ce cas la ligne méridienne ne rencontre pas l'axe de rotation. La surface n'est pas fermée, ou est engendrée par la rotation d'un contour fermé. Si, au contraire, $c = 0$, r peut s'annuler, la surface coupe l'axe de rotation et le coupe normalement, car d'après (5) $\sin\varphi = 0$ pour $c = 0$ et $r = 0$.

Enfin, l'intégration de l'équation (2) s'achève par une quadrature et la valeur de z est donnée par l'intégrale définie

$$(6) \qquad z = \int_{r_0}^{r} \frac{ar^4 + 2br^2 + 4c}{\sqrt{16r^2 - (ar^4 + 2br^2 + 4c)^2}}\, dr.$$

Comme le second membre de (6) dépend des intégrales hyperelliptiques, nous analyserons la courbe d'après l'équation différentielle elle-même. Posant pour abréger l'écriture

$$u = r^2,$$

u étant une nouvelle variable, forcément positive, la formule (6) s'écrira

$$(7) \qquad z = \int_{u_0}^{u} \frac{au^2 + 2bu + 4c}{\sqrt{16u - (au^2 + 2bu + 4c)}} \frac{du}{2\sqrt{u}}.$$

Considérons maintenant les différents cas qui peuvent se présenter suivant la valeur de la quantité $b^2 - 4ac$.

3° *Premier cas :* $b^2 - 4ac < 0$. — Dans ce cas, le trinome du numérateur

$$au^2 + 2bu + 4c$$

reste toujours positif. Désignant la fonction sous le radical par $f(u)$

$$f(u) = 16u - (au^2 + 2bu + 4c)^2,$$

on voit facilement que cette fonction a deux et seulement deux racines réelles et positives, à condition que l'on ait

$$1 - bc > 0.$$

Soient u_1 et u_2 ces racines et r_1 et r_2 les valeurs de r leur correspondant. Alors, pour $r_1 < r < r_2$, $f(u)$ sera positive et z sera réel. En dehors de cet intervalle, z devient imaginaire.

Ainsi r_1 et r_2 sont les limites entre lesquelles r varie.

Si au contraire $1 - bc < 0$, $f(u)$ sera toujours négative et nous n'aurons aucune branche réelle de la ligne cherchée. La surface n'existe pas.

Supposons donc que les conditions

$$b^2 - 4ac < 0 \qquad \text{et} \qquad 1 - bc > 0$$

soient vérifiées et considérons la forme de la courbe. Il est évident que notre courbe doit être comprise entre deux droites parallèles à l'axe OZ

$$AA'(r = r_1) \qquad \text{et} \qquad BB'(r = r_2).$$

Si nous prenons dans la formule (6) $r_0 = r_1$, nous devons commencer la courbe par le point A dont les coordonnées sont $r = r_1$, $z = 0$.

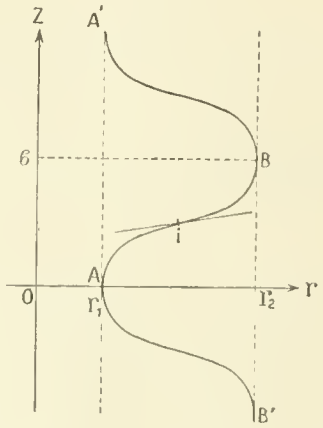
Pour étudier la branche supérieure de la courbe, prenons devant le radical le signe $+$.

Au point initial, la tangente est verticale. Lorsque r croît de r_1 à r_2, z est croissante et reste finie. Comme $\tang \varphi$ ne s'annule pas entre r_1 et r_2, la tangente ne devient jamais horizontale. Il est facile

de voir que tang φ, qui est infinie au point A, commence à décroître, atteint son minimum au point d'inflexion i, et croît ensuite jusqu'au point $r = r_2$, où elle redevient infinie.

Désignons le point correspondant de la courbe par la lettre B et

Fig. 5.



l'ordonnée de ce point par OC. Après B, r ne peut pas croître, donc il doit diminuer, et, si nous voulons suivre la courbe, nous devons changer le signe devant le radical, pour ne pas revenir sur nos pas. Par conséquent, nous devons maintenant prendre C pour origine et poser

$$z = \int_{r_2}^{r_1} \frac{ar^4 + 2br^2 + 4c}{-\sqrt{16r^2 - (ar^4 + 2br^2 + 4c)^2}}\, dr.$$

Alors z croîtra et nous aurons la portion suivante de notre courbe (BA'). Évidemment la tangente sera de nouveau verticale au point A' et nous pourrons continuer indéfiniment notre construction. Nous obtenons ainsi une ligne analogue à l'onduloïde de Plateau. On voit facilement que cette courbe est symétrique par rapport aux perpendiculaires abaissées des points A, B, A', ... sur l'axe de rotation.

Si la fonction f a une racine double, $r_1 = r_2$, les lignes AA' et BB' coïncident; l'onduloïde devient une droite et la surface en question devient un cylindre de révolution. On verra plus loin que cela aura

lieu si la condition suivante est vérifiée :

$$4c(k^2+18ab)-(2b^2+27a)=0,$$

où l'on pose

$$k=b^2-4ac.$$

4° *Deuxième cas :* $b^2-4ac=0$. — Étudions maintenant le cas où le numérateur

$$ar^4+2br^2+4c$$

a une racine double, ce qui s'exprime par la condition

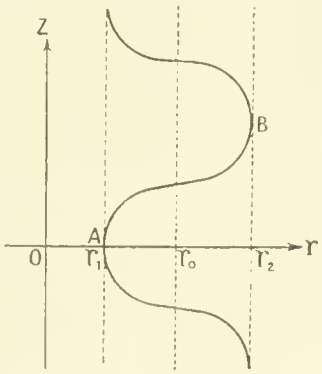
$$b^2-4ac=0.$$

Désignant par r' cette racine double, nous aurons

$$z=\int\frac{a(r^2-r'^2)^2}{\sqrt{16r^2-a^2(r^2-r'^2)^4}}\,dr.$$

Ensuite, pour que r' soit réelle, il faut avoir $b<0$. Si $b>0$, la fonction $a(r^2-r'^2)$ ne s'annule pas pour $0<r<\infty$ et nous tombons sur

Fig. 6.



le cas précédent. Supposons donc que la condition $b<0$ soit vérifiée. On verra facilement que, dans ce cas, $f(u)$ aura deux racines entre 0 et ∞ et que la racine r' du numérateur se trouvera entre les racines r_1 et r_2 du dénominateur.

Construisons maintenant notre courbe. Elle sera comprise, comme la précédente, entre deux droites parallèles à l'axe OZ et définies par $r=r_1$ et $r=r_2$.

Commençons la ligne par le point A ($r = r_1$; $z = 0$) où la tangente est verticale, et prenons devant le radical le signe $+$. Dans ces conditions, z croîtra de $r = r_1$ à $r = r_2$; mais au point $r = r'$, qui est en même temps le point d'inflexion, la tangente devient horizontale. Nous trouvons ainsi une ligne, toujours analogue à l'onduloïde de Plateau, avec la seule différence que la tangente au point d'inflexion sera horizontale.

Notons encore que cette ligne ne peut pas se transformer en une droite, car f ne peut pas avoir une racine double qui, forcément, serait égale à r'.

5° *Troisième cas* : $b^2 - 4ac > 0$. — Considérons maintenant le cas où le numérateur a deux racines distinctes, ce qui aura lieu pour $b^2 - 4ac > 0$.

Désignons ces racines par $u' = r'^2$ et $u'' = r''^2$. Si $c < 0$, ces racines sont de signes différents et le numérateur s'annule une seule fois entre $r = 0$ et $r = \infty$. Si $c > 0$, les racines sont de même signe; mais, pour que ce signe soit positif, il faut avoir $b < 0$.

Supposons d'abord que les conditions

$$b^2 - 4ac > 0, \qquad b < 0, \qquad c > 0$$

soient vérifiées. Appelant, comme d'habitude,

$$f(u) = 16u - (au^2 + 2bu + 4c)^2,$$

nous aurons

$$\begin{aligned} f'(u) &= 16 - 4(au^2 + 2bu + 4c)(au + b), \\ f''(u) &= -4a(au^2 + 2bu + 4c) - 8(au + b)^2, \\ f'''(u) &= -24a(au + b). \end{aligned}$$

Faisons le Tableau

u.	0.	u'.	$-\frac{b}{a} - \alpha$.	$-\frac{b}{a} = \frac{u' + u''}{2}$.
$f(u)$	< 0	$16u' > 0$	$+16\left(-\frac{b}{a} + \alpha\right) - \frac{4}{9a^2}(b^2 - 5ac)^2$	$\frac{16ab - (b^2 - 4ac)^2}{a^2}$
$f'(u)$	> 0	$16 > 0$	$16 - \frac{8}{3}\alpha(b^2 - 5ac)$	$16 > 0$
$f''(u)$	< 0	< 0	0	> 0
$f'''(u)$	> 0	> 0	> 0	0

u.	$-\frac{b}{a}+\alpha$.	u''.	∞.
$f(u)$	$16\left(-\frac{b}{a}+\alpha\right)-\frac{4}{9a^2}(b^2-5ac)^2$	$16u''>0$	<0
$f'(u)$	$16+\frac{8}{3}\alpha(b^2-5ac)$	$16>0$	<0
$f''(u)$	0	<0	<0
$f'''(u)$	<0	<0	<0

où l'on pose

$$\alpha=\sqrt{\frac{b^2-2ac}{3a^2}}$$

et où l'on suppose

$$b^2-5ac>0.$$

Nous voyons que $f(u)$ peut avoir au plus quatre racines et qu'elle en a au moins deux : une entre o et u' et l'autre entre u'' et ∞. Quant aux deux autres, elles ne peuvent exister qu'entre u' et u''.

Remarquant que $f'(u)$ a son maximum en $\left(-\frac{b}{a}+\alpha\right)$ et son minimum en $\left(-\frac{b}{a}-\alpha\right)$, nous voyons qu'elle ne peut avoir ses deux racines (en plus de celle qui est entre u'' et ∞) que dans l'intervalle $\left(u'\ldots-\frac{b}{a}\right)$, et cela à condition que

$$16-\frac{8}{3}\alpha(b^2-5ac)<0 \qquad \text{ou} \qquad b^2>5ac+\frac{6}{\alpha}.$$

Désignant ces racines par β et γ $\left(u'<\beta<\gamma<-\frac{b}{a}\right)$, nous voyons que, pour $u=\beta$, la fonction $f(u)$ a son maximum, et pour $u=\gamma$ son minimum. Par conséquent, $f(u)$ aura une racine double pour une certaine valeur de b et ensuite deux racines distinctes : l'une entre β et γ, et l'autre entre γ et $-\frac{b}{a}$.

En résumé nous voyons que, pour $b^2-4ac=0$, le numérateur a une seule racine et le dénominateur en a deux (les deux extrêmes r_1 et r_4). Pour les valeurs positives, mais assez petites de b^2-4ac, le numérateur a déjà deux racines r' et r'', mais le dénominateur en a toujours deux (r_2 et r_3) réparties de la manière suivante :

$$0<r_1<r'<r''<r_4<\infty.$$

Enfin pour a assez grand ou, autrement, pour b assez petit, le dénominateur $f(u)$ aura une racine double et ensuite deux racines distinctes qui seront situées entre r' et r''. Pour trouver la condition que doivent vérifier a et b pour que $f(u)$ ait une racine double, cherchons la condition nécessaire et suffisante pour que $f(u)$ et $f'(u)$ aient une racine commune. Dans ce but, cherchons leur commun diviseur par la méthode des divisions successives et égalons à zéro le dernier reste. Le dernier quotient, qui sera justement le commun diviseur, nous donnera la racine double. Effectuant l'opération, on trouve que le dernier quotient est

$$(8) \qquad \frac{-k^2}{16a(bk+9a)}\left(ku+\frac{k^3+b^2k^2+33abk+108a^2}{abk+9a^2}\right)$$

et que le dernier reste est

$$\frac{(4ack-3ab)(k^3+b^2k^2+33abk+108a)}{(abk+9a^2)^2}+\frac{4(b-ck)}{a}.$$

Par conséquent, la condition cherchée est

$$(4ck+3b)(k^3+b^2k^2+33abk+108a^2)+4(b-ck)(bk+9a)^2=0.$$

Toutes simplifications faites, elle devient

$$(9) \qquad 4c(k^2+18ab)-(2b^3+27a)=0,$$

ou autrement

$$b=-\frac{4ck^2+27a}{64ac-2k}=-\frac{4c(3a^2\alpha^2-2ac)^2+27a}{68ac-6a^2\alpha^2},$$

où nous posons comme avant

$$k=b^2-4ac, \qquad \alpha=\sqrt{\frac{b^2-2ac}{3a^2}}.$$

La condition (9) étant remplie, la fonction $f(u)$ a une racine double, que nous obtenons en égalant à zéro l'expression (8).

Si enfin la vitesse augmente encore, nous aurons

$$b<\frac{4ck+27a}{64ac-2k},$$

et la fonction $f(u)$ aura toutes ses quatre racines : une (r_1) entre o et r', deux (r_2 et r_3) entre r' et r'', et une (r_4) entre r'' et ∞.

Étudions maintenant la courbure de notre courbe. Comme nous avons

$$\frac{dz}{dr} = \frac{ar^4 + 2br^2 + 4c}{\pm\sqrt{16r^2 - (ar^4 + 2br^2 + 4c)^2}},$$

nous aurons

$$\frac{d^2z}{dr^2} = \pm \frac{16r(3ar^4 + 2br^2 - 4c)}{[16r^2 - (ar^4 + 2br^2 + 4ac)^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Quant au choix du signe, nous devons prendre le même signe dans les deux formules. Ainsi, pour la branche ascendante de la courbe, la courbure sera

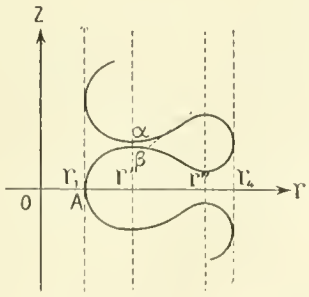
$$(10) \qquad \frac{1}{R} = \frac{3ar^4 + 2br^2 - 4c}{4r^2} = \frac{3au^2 + 2bu - 4c}{4u}.$$

Écrivant

$$\frac{1}{R} = \frac{a\left[4r^2\left(r^2 + \frac{b}{a}\right) - (r^2 - r'^2)(r^2 - r''^2)\right]}{4r^2},$$

et remarquant que le trinome $3ar^4 + 2br^2 - 4c$ a pour $c > 0$ toujours deux racines réelles mais de signes contraires, nous voyons que la courbe ne peut avoir qu'un point d'inflexion et que, si elle l'a, il se trouve nécessairement entre r' et r''.

Fig. 7.



Maintenant, nous pouvons construire la ligne méridienne. Supposons d'abord que $b^2 - 4ac$ soit assez petit pour que $f(u)$ n'ait que deux racines extrêmes r_2 et r_4. Partons comme toujours du point A

($r = r_1$; $z = 0$), où la tangente est verticale, et prenons devant le radical le signe $+$. A partir de ce point z croît jusqu'à $r = r'$, où la tangente devient horizontale et où z a son maximum. A partir de ce point $\frac{dz}{dr}$ change de signe, z décroît jusqu'au point $r = r''$, où la tangente est de nouveau horizontale et où z a son minimum. Dans ce point ($r = r''$), $\frac{dz}{dr}$ change encore une fois de signe et z croît jusqu'à $r = r_4$, où la tangente devient verticale. Ensuite faisons décroître r de r_4 à r_1 et, pour ne pas retourner sur nos pas, changeons le signe devant le radical. Alors z croîtra de r_4 à r'', où il aura son maximum, puis il décroîtra de r'' à r', où il aura son minimum. Enfin, il croîtra de r' à r_1, où la tangente sera de nouveau verticale. Là nous changeons de nouveau le signe devant le radical et répétons indéfiniment le même raisonnement. La figure 7 représente la ligne en question.

Si b décroît, le minimum en α et le maximum en β s'accentuent, et, pour une certaine valeur de b, notre courbe a pour $r = r'$ un point double avec une seule tangente horizontale (*fig.* 8). Ensuite, le minimum en α devient plus petit que le maximum en β et les deux branches de la courbe se coupent et donnent deux points doubles

Fig. 8.

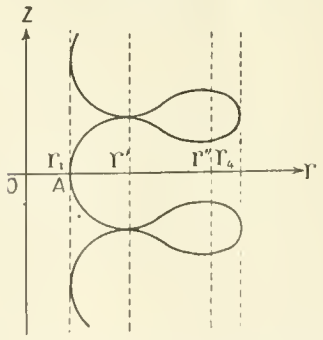
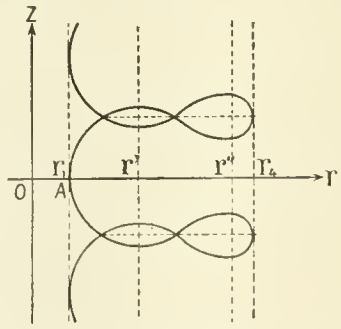


Fig. 9.



avec deux tangentes symétriques par rapport à l'horizontale (*fig.* 9). Ensuite, lorsqu'on aura

$$b^2 = -\frac{4ck^2 + 27a}{64ac - 2k},$$

$f(u)$ aura une racine double. La tangente sera verticale en ce

point et la courbe prendra la forme suivante représentée sur la figure 10.

Et enfin, si b diminue encore, $f(u)$ aura toutes ses quatre racines et la courbe ne sera plus d'un seul tenant. Entre r_2 et r_3 $f(u)$ sera

Fig. 10.

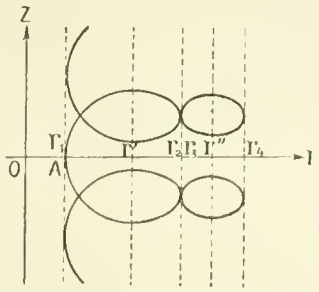
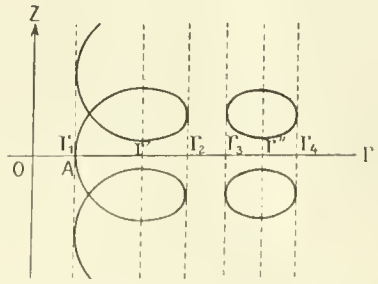


Fig. 11.



négative, par conséquent z sera imaginaire et la courbe sera composée de deux parties distinctes (*fig.* 11).

La racine de $\frac{1}{R}$ tombe entre r_2 et r_3 et la courbe n'a pas de points d'inflexion.

6° *Cas de* $c < 0$. — Supposons maintenant $c < 0$. Dans ce cas, dans l'expression de z,

$$z = \int_{r_0}^{r} \frac{ar^4 + 2br^2 + 4c}{\pm\sqrt{16r^2 - (ar^4 + 2br^2 + 4c)^2}}\, dr,$$

le numérateur a toujours une et unique racine positive r' comprise entre deux racines du dénominateur r_1 et r_2.

La formule (10) nous montre encore que la courbe peut avoir deux points d'inflexion si $b < 0$ et n'en a pas du tout pour $b \geq 0$. Nous pouvons remarquer encore que si la courbe a des points d'inflexion, les abscisses de ces points sont plus petites que r'. En effet, les abscisses des points d'inflexion sont

$$r_i^2 = -\frac{b}{3a} \pm \sqrt{\left(\frac{-b}{3a}\right)^2 + \frac{4c}{3a}},$$

tandis que

$$r'^2 = -\frac{b}{a} + \sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2 - \frac{4c}{a}}.$$

Pour $b > 0$, $f'''(u)$ n'a pas de racines, par conséquent $f(u)$ a au plus trois racines et, comme elle doit en avoir un nombre pair, elle en a exactement deux : r_1 et r_4.

Quant au numérateur $ar^4 + 2br^2 + 4c$, il a une et une seule racine réelle et positive, qui se trouve entre r_1 et r_4. Désignant cette racine par r', nous voyons que pour $r < r'$ le numérateur est négatif et que, si nous voulons commencer par le point A ($r = r_1$; $z = 0$) et avoir z croissant, nous devons prendre devant le radical le signe $-$. Nous devons prendre le même signe dans la formule (10) et écrire pour la courbure

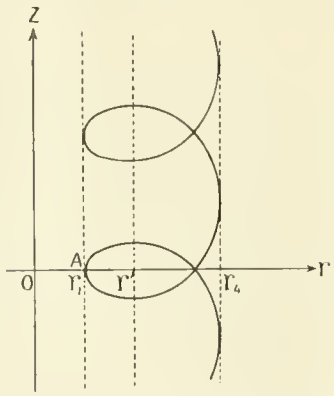
$$\frac{1}{R} = -\frac{3ar^4 + 2br^2 - 4c}{4r^2}.$$

On voit ainsi que la ligne n'a pas de point d'inflexion, mais que la valeur absolue de la courbure a un maximum pour r vérifiant l'équation

$$3ar^4 + 4c = 0. \tag{11}$$

Pour $b < 0$, ce minimum peut devenir un point de courbure nulle

Fig. 12.



pour $b^2 + 12ac = 0$, et enfin il peut produire deux points d'inflexion dont les abscisses, comme nous l'avons vu, sont toujours plus petites que r'.

Par conséquent, pour a assez petit, la courbure sera toujours

décroissante (en valeur absolue) lorsque r variera de r_1 à r_4 et nous aurons la courbe analogue au nodoïde de Plateau (*fig.* 12).

Pour a suffisamment grand, la racine de l'équation (11) peut entrer dans l'intervalle $(r_1 \ldots r_4)$ et passer successivement par toutes

Fig. 13.

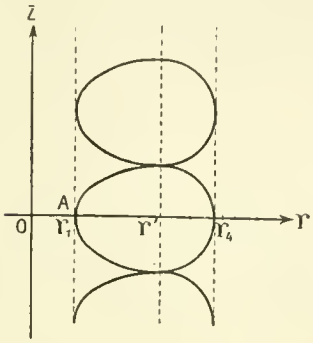
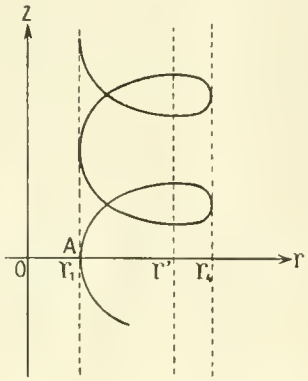


Fig. 14.



les valeurs de r_4 à r_1. La courbure de la courbe aura alors un minimum entre r_1 et r_4 et enfin, lorsque la racine de (11) deviendra plus petite que r_1, la courbure de la courbe sera croissante dans tout

Fig. 15.

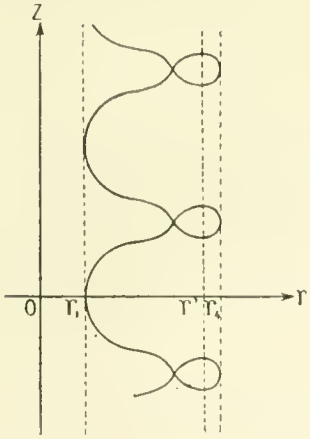
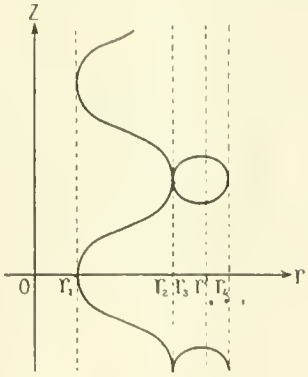


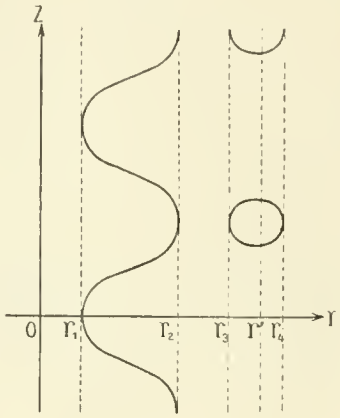
Fig. 16.



l'intervalle $(r_1 \ldots r_4)$. La courbe affectera la figure 14 en passant, selon toute la probabilité, par la figure 13.

Si encore, pendant que la racine de (11) se trouve dans l'intervalle $(r_1 \ldots r_4)$, la condition $b^2 + 12ac > 0$ est vérifiée et la fonction $f(u)$ a une racine double, la conrbe subira les transformations suivantes (*fig.* 15 et 16).

Fig. 17.



Et enfin, lorsque $f(u)$ aura toutes ces quatre racines, la courbe donnera naissance à un anneau (*fig.* 17).

7° *Les surfaces fermées.* — Un cas tout particulier se présente lorsque nous avons $c = 0$.

Dans ce cas, les formules (5) et (6) deviennent

$$\sin\varphi = \frac{ar^3}{4} + \frac{br}{2}, \tag{12}$$

$$z = \int_0^r \frac{(ar^3 + 2br)\,dr}{\sqrt{16 - (ar^3 + 2br)^2}} = \frac{1}{2}\int_0^{r^2} \frac{(au + 2b)\,du}{\sqrt{16 - u(au + 2b)^2}}. \tag{13}$$

Nous avons déjà vu que dans ces conditions r peut s'annuler, la surface peut couper l'axe de rotation et, si elle le coupe, elle le coupe normalement.

Les résultats sont différents suivant que nous aurons

$$b > 0 \qquad \text{ou} \qquad b < 0.$$

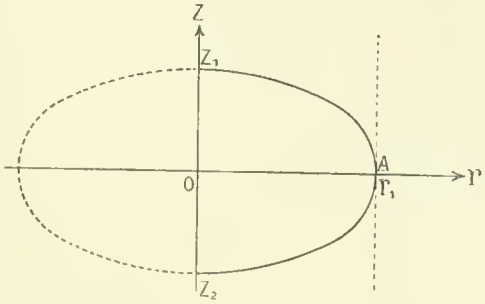
8° *Cas de* $b > 0$. — Dans ce cas, le numérateur de la formule (13) ne s'annule que pour $r = 0$ et le dénominateur a une seule racine

réelle et positive que nous désignerons par r_1. Comme le dénominateur n'est réel que pour $0 \leq r \leq r_1$, toute la courbe sera comprise entre l'axe de rotation et la droite $r = r_1$.

Cela posé, la courbe qui est du genre de l'ellipse est facile à construire. Si nous commençons par le point $A(r = r_1 ; z = 0)$, et si nous prenons le signe $-$ devant le radical, nous obtenons la partie supérieure de la courbe qui coupe l'axe au point $r = 0$, $z = z_1$.

Partant du même point, mais en prenant devant le radical le signe $+$

Fig. 18.



et en faisant décroître r de r_1 à 0, nous obtenons la partie inférieure de la courbe qui coupe l'axe de rotation au point $z = z_2$. Il est facile de voir que la courbe est symétrique par rapport à l'axe Or et que, par conséquent, $z_2 = -z_1$.

Nous pouvons obtenir une infinité de courbes identiques à la précédente et se touchant mutuellement sur l'axe de rotation, en prenant pour point de départ les points z_1 et z_2 et en prenant les signes convenables devant le radical. En faisant tourner ces courbes, nous aurons une infinité de surfaces pareilles, analogues à l'ellipsoïde de révolution et se touchant mutuellement sur l'axe de rotation. Si nous considérons une masse liquide limitée, nous devons prendre une de ces surfaces.

9° *Cas de* $b < 0$. — Pour $b < 0$ le numérateur s'annule, non seulement pour $r = 0$, mais encore pour

$$\sqrt{\frac{-2b}{a}} = r',$$

tandis que le dénominateur peut avoir une ou deux racines (dont une double) ou enfin, trois racines distinctes. Il est facile de voir que, dans ce dernier cas, les trois racines sont réparties de la manière suivante :

$$0 < r_1^2 < -\frac{2}{3}\frac{b}{a} < r_2^2 < -\frac{2b}{a} = r'^2 < r_3 < \infty.$$

La formule (9), dans laquelle on fait $c = 0$, nous donne la condition nécessaire et suffisante pour que le dénominateur ait une racine double

$$2b^3 + 27a = 0.$$

Enfin, pour

$$2b^3 + 27a < 0,$$

nous aurons les trois racines.

Faisant $c = 0$, dans la formule (10), nous aurons l'expression suivante pour la courbure de notre courbe

$$\frac{1}{R} = \frac{3ar^2 + 2b}{4}.$$

Sur l'axe de rotation cette courbure se réduit à $\frac{b}{2}$. Par conséquent pour $b > 0$, la courbe n'a pas de point d'inflexion, pour $b = 0$, la

Fig. 19.

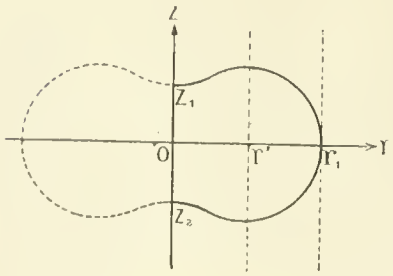
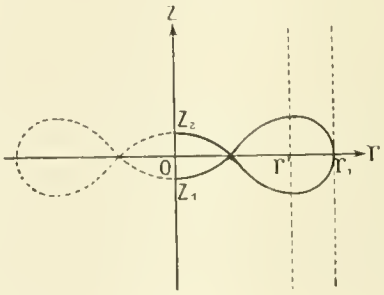


Fig. 20.



courbure sur l'axe devient nulle et pour $b < 0$, nous aurons un point d'inflexion pour $r = \sqrt{\frac{-2b}{3a}}$ et le changement de signe de la courbure sur l'axe de rotation. Ainsi, la surface est convexe pour $b > 0$, et a des cavités aux pôles pour $b < 0$ (*fig.* 19).

Lorsque la vitesse croît, ces cavités s'accentuent, les points z_1 et z_2 se rapprochent et à un certain moment se touchent au point O. La courbe y aura un point double avec une seule tangente horizontale. Si la vitesse augmente encore, les cavités s'approfondissent, z_1 devient négatif, z_2 positif, le point double se déplace à droite. Les deux branches de la courbe qui se coupent en ce point auront maintenant deux tangentes différentes (*fig.* 20).

Si la vitesse augmente encore jusqu'à ce qu'on ait $2b^3 + 27a = 0$, la fonction du dénominateur a une racine double, et ce point double coïncidera avec le point d'inflexion. Les deux tangentes deviennent verticales et coïncident (*fig.* 21).

Enfin pour $2b^3 + 27a < 0$ le dénominateur aura toutes ses trois

Fig. 21.

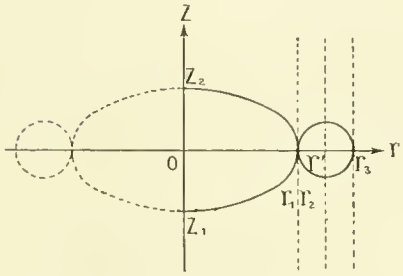
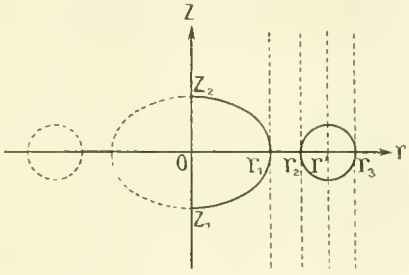


Fig. 22.



racines r_1, r_2, r_3. Pour construire la courbe, il suffit de remarquer que pour $r_1 < r < r_2$, z devient imaginaire et que, par conséquent, la courbe n'est plus d'un seul tenant. Elle est composée de deux parties distinctes : l'une comprise entre o et r_1 et l'autre entre r_2 et r_3. Comme l'abscisse du point d'inflexion tombe entre r_1 et r_2, la courbe n'a pas de point d'inflexion. Nous la traçons en tenant compte de ce que pour $r = r_1$, $r = r_2$ et $r = r_3$ la tangente est verticale et pour $r = 0$ et $r = r'$ elle est horizontale et nous obtenons la courbe représentée sur la figure 22.

La surface engendrée par la rotation de cette courbe sera composée d'un corps central analogue à l'ellipsoïde de révolution et d'un anneau autour.

10° *Intégration à l'aide des fonctions elliptiques.* — L'inté-

grale (13) est une intégrale elliptique et peut être ramenée facilement à la forme normale de Weiertrass par la substitution classique

$$u = my + n,$$

où l'on pose

$$m^3 = -\frac{4}{a^2},$$

$$n = -\frac{4b}{3a}.$$

Posant ensuite

$$g_2 = 3a^2mn^2 + 8abmn + 4b^2m \qquad = -\frac{4}{3}mb^2,$$

$$g_3 = \quad a^2n^3 \quad + 4abn^3 \quad + 4b^2n - 16 = -16\left(\frac{b^3}{a} + 1\right),$$

nous ramenons notre intégrale à la forme définitive

$$z = \frac{m}{2}\int \frac{amy + \frac{2}{3}b}{\sqrt{4y^3 - g_2y - g_3}}\,dy.$$

Enfin, si nous prenons

$$y = p\varphi,$$

nous aurons

$$z = \frac{m}{2}\int\left(ampv + \frac{2}{3}b\right)dv = -\frac{am^2}{2}\zeta v + \frac{mb}{3}v + \text{const.},$$

$$r^2 = u = mpv + \frac{4b}{3a}.$$

Ces deux formules nous permettent de calculer r et z en fonctions uniformes d'un seul paramètre v et d'effectuer ainsi la construction de la courbe.

Si nous voulons que le volume reste constant, a et b doivent vérifier la condition

$$\int_0^{r_1} \pi r^2\,dz = \frac{m}{2}\int\left(ampv + \frac{2}{3}b\right)\left(mpv + \frac{4b}{3a}\right)dv = \text{const.}$$

Résumé. — Si nous faisons $a = 0$ dans toutes nos formules, nous aurons les figures d'équilibre statique correspondant à chacune de nos séries des figures d'équilibre relatif. D'après les travaux de

Plateau, ces figures d'équilibre statique sont : la sphère (pour $c = 0$), le nodoïde (pour $b > 0$, $c < 0$), le cylindre et l'onduloïde (pour $b > 0$, $c > 0$) et le caténoïde (pour $b = 0$, $c > 0$) (ce dernier ne joue aucun rôle particulier). Considérant ces figures comme figures de départ, je crois avoir obtenu les résultats suivants :

1° La sphère, en tournant de plus en plus vite, commence à s'aplatir, ensuite pour $b < 0$, il se forme des cavités aux pôles qui, en s'accentuant se rencontrent et forment un trou le long de l'axe. La figure devient annulaire, mais comme l'arête ne peut pas exister, cet anneau change brusquement de forme pour affecter la figure de l'anneau à deux tangentes verticales (*fig.* 22). Si la vitesse croît encore, l'anneau se modifie en s'élargissant et s'amincissant.

2° Un nodoïde se transforme d'abord en une figure analogue. Pour la vitesse angulaire assez petite, il affecte la figure 12 et si la vitesse croît, passe consécutivement par les figures 13 et 14, et même peut passer par les figures 15, 16 et 17 et donner naissance à un anneau. Il faut distinguer quelle partie de la surface limitait au début le liquide. La partie convexe du nodoïde se transforme en la partie convexe des figures 12, 13, 14, 15, 16 et 17 et peut donner naissance à un anneau. La partie concave reste concave. Si le liquide remplit le nœud, il y reste et définitivement se transforme en le nœud de la figure 14 et peut enfin donner naissance à un anneau libre.

3° Pour le cylindre, il est clair qu'il est une figure d'équilibre pour n'importe quelle vitesse si la somme de la pression extérieure et de la pression capillaire est suffisamment grande.

4° Quant à l'onduloïde, pour une vitesse assez petite, la figure conserve son genre (*fig.* 5) et cela jusqu'au moment où b, passant par zéro, devient négatif et assez petit pour avoir $b^2 - 4ac = 0$. En ce moment, le liquide affecte la forme de la figure 6. Si la vitesse croît toujours, b décroît encore et le liquide affecte les formes des figures 7 et 8. Mais ensuite la figure 9 devient impossible, car la partie entre les points doubles ne peut pas être remplie de liquide. Alors la figure se rompt suivant la circonférence tracée par le point double et l'anneau se détache. Une fois détaché l'anneau prend immédiatement la figure de l'anneau libre avec $c = 0$.

Quant au reste du liquide, la valeur de c change brusquement pour lui, il prend la forme de la figure 5 et le jeu recommence.

Ces dernières transformations présentent un intérêt tout particulier, parce qu'elles représentent le cas de la fameuse expérience de Plateau, qui devait illustrer l'hypothèse de Laplace sur la formation des corps célestes.

En effet, par le seul fait d'introduction d'une tige métallique, servant à faire tourner la sphère d'huile, Plateau transforma la sphère en une partie de l'onduloïde.

Par conséquent, l'anneau qu'il a obtenu, provenait, non pas d'une sphère libre, mais d'une masse liquide indéfinie. Une sphère libre se serait transformée en un seul anneau sans masse centrale.

Ainsi, une partie des résultats que j'ai obtenus se trouve déjà vérifiée expérimentalement. Quant aux autres résultats, j'espère les vérifier prochainement.

Sur la méthode d'approximation d'Hermite;

PAR G. HUMBERT.

Exposé du travail.

1. Hermite a indiqué, pour l'approximation d'un nombre irrationnel *positif*, ω, une méthode extrêmement remarquable [1].

Il considère la forme quadratique binaire et positive

$$\varphi(X, Y) = (X - \omega Y)^2 + k^2 Y^2, \tag{1}$$

où k est un paramètre positif. Soient $X = a$, $Y = c$ les valeurs *entières*, non nulles à la fois, de X et Y, qui rendent $\varphi(X, Y)$ minimum : il est clair, puisque $\omega > 0$, qu'on a le droit d'admettre que a et c, évidemment premiers entre eux, sont tous deux positifs. D'autre part, on sait que le minimum, $\varphi(a, c)$, est au plus égal au produit de la racine carrée du discriminant de φ par le facteur $2 : \sqrt{3}$, c'est-à-dire que

$$(a - c\omega)^2 + k^2 c^2 \leqq \frac{2k}{\sqrt{3}}.$$

Le produit des deux termes qui figurent au premier membre étant au plus égal au carré de la moitié du second membre, on en déduit l'inégalité

$$\left|\frac{a}{c} - \omega\right| \leqq \frac{1}{\sqrt{3}\, c^2};$$

en sorte que la fraction irréductible $a : c$ représente ω avec une

[1] *Journal de Crelle*, t. 41, p. 195, et *Œuvres*, t. I, p. 168.

approximation au moins égale à $1:\sqrt{3}c^2$, approximation supérieure (à cause du facteur $1:\sqrt{3}$) à celle que donnent les fractions continues ordinaires.

En faisant décroître k de ∞ à 0, on obtient ainsi une suite de fractions irréductibles, qui tendent vers ω, et Hermite montre qu'elles possèdent plusieurs propriétés des fractions continues.

Le but du présent travail est l'étude approfondie de cette méthode d'approximation; grâce à une *interprétation géométrique* simple, on résoudra les problèmes suivants :

1° *Étant données deux fractions d'Hermite consécutives, trouver la suivante*, c'est-à-dire former directement la suite d'Hermite.

2° *Reconnaître si une fraction donnée appartient à cette suite.*

3° *Étudier la liaison entre les réduites ordinaires de ω et les fractions d'Hermite.*

Nous serons également conduits à un *développement de ω*, analogue au développement en fraction continue, et dont nous exposerons les propriétés principales.

Interprétation géométrique.

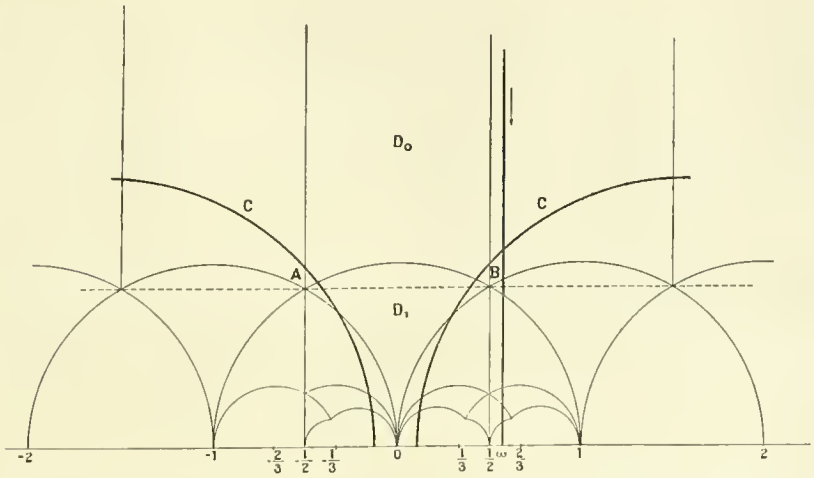
2. Elle se rattache à la *division modulaire* classique du demi-plan analytique (*fig.* 1), en triangles ou domaines, dont les côtés sont des segments de droite, ou des arcs de cercle, normaux à l'axe réel Ox. On l'obtient en partant du *domaine fondamental* ordinaire, D_0, dont les sommets sont $(-1+i\sqrt{3}):2$, soit A; $(1+i\sqrt{3}):2$, soit B; et le point à l'infini sur Oy; ses angles sont $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}$ et 0. On prend ensuite les *symétriques* [1] de D_0 par rapport à ses trois côtés, et ainsi de suite pour les domaines successivement obtenus : chaque domaine de la division a, sur Ox ou à l'infini, un sommet d'angle nul, que nous appellerons *pointe*, réservant le nom de *sommets* à ceux

[1] La symétrique d'une figure par rapport à une circonférence est son inverse quand on prend pour pôle le centre, et pour puissance, le carré du rayon de la circonférence.

d'angle $\frac{\pi}{3}$. Nous dirons que, dans un domaine, le côté opposé à la pointe est la *base*, et que les côtés aboutissant à la pointe sont les *côtés* du domaine.

Nous désignerons par D_1 le domaine OAB (de pointe o) adjacent à D_0 par la base.

Fig. 1.



Nous rappelons ces résultats pour mémoire ; nous supposerons connues les propriétés classiques de la figure modulaire [1], et en particulier, l'invariance de l'ensemble de cette figure vis-à-vis de toute substitution modulaire.

3. Cela posé, la forme φ s'annule pour $X : Y = \omega \pm ik$; le point analytique $z = \omega + ik$, situé au-dessus de Ox, est ce qu'on nomme le *point représentatif* de φ; il est situé sur la droite $x = \omega$, marquée en trait fort sur la figure 1, et, lorsque k va de ∞ à o, il parcourt cette droite, en allant de ∞ au point ω de Ox.

Dans ce mouvement, il traverse des domaines modulaires successifs

[1] Dans la figure 1, qui représente quelques domaines de la division modulaire, les lignes tracées en traits plus forts n'appartiennent pas à cette division; leur signification sera donnée plus loin (ci-après, n° **3**, pour la ligne droite, et n^{os} **6** et **9** pour les arcs).

en nombre infini, car on sait que les domaines modulaires deviennent infiniment petits dans tous les sens, à l'approche de l'axe Ox; soit D l'un d'eux : on transforme D en D_0 par une substitution modulaire

$$(2) \qquad z = \frac{a\zeta + b}{c\zeta + d} \qquad (a, b, c, d \text{ entiers et } ad - bc = 1),$$

z désignant un point de D et ζ son transformé dans D_0. Par la substitution à deux variables correspondante, $\varphi(X, Y)$ devient la forme *équivalente* $\varphi(ax + by, cx + dy)$; si z, point de D, est le point représentatif de $\varphi(X, Y)$, le point transformé ζ, *situé dans* D_0, représentera $\varphi(ax + by, cx + dy)$: cette dernière forme, en vertu d'une propriété classique, sera donc *réduite*, dans le sens de Gauss.

Or, dans une réduite, le premier coefficient, celui de x^2, est le minimum de la forme (pour les valeurs entières, non nulles à la fois, prises par les variables); le minimum de la réduite est donc $\varphi(a, c)$, et c'est aussi le minimum de la forme équivalente $\varphi(X, Y)$. En d'autres termes, le minimum de $\varphi(X, Y)$ s'obtient pour $X = a$, $Y = c$.

D'autre part, on voit dans (2) que, pour $z = a : c$, on a $\zeta = \infty$; sous une autre forme, le point $a : c$ de Ox correspond, par (2), *à la pointe de* D_0 : *c'est donc la pointe de* D.

Dès lors, la méthode d'Hermite consistant à prendre $a : c$ pour valeur approchée de ω, on peut en donner l'interprétation géométrique suivante :

Un point mobile parcourt la droite $x = \omega$, en partant de ∞ et en se dirigeant vers le point ω de Ox, dans le demi-plan supérieur : on prend, pour approcher de ω, les abscisses, $a : c$, des POINTES *des domaines modulaires que traverse successivement le point mobile.*

On a ainsi un procédé géométrique sûr pour obtenir, *dans leur ordre*, les fractions successives d'Hermite, et l'on voit de suite, par la représentation précédente, que ces fractions ont ω pour limite.

Remarque. — Si ω est irrationnel, je dis que la droite $x = \omega$ ne contient aucun *sommet* de domaine modulaire : car un tel sommet, transformé par une substitution modulaire du sommet B de D_0, a, comme on le reconnaît de suite, une abscisse rationnelle.

Dès lors, quand le point mobile passe d'un domaine à un autre, il le fait en traversant une frontière (base ou côté) commune à ces deux domaines, et jamais en franchissant un sommet.

Formation de la suite d'Hermite.

4. Il est clair (*fig.* 1) que le premier domaine traversé par la droite $x = \omega$ a pour pointe le point à l'infini, c'est-à-dire $1 : 0$, et le second le point $\theta_0 : 1$, en désignant par θ_0 l'*entier* (positif ou nul) *le plus voisin de* ω.

Donc, pour obtenir la suite d'Hermite, il suffira de savoir résoudre ce problème :

Soient $p_0 : q_0$ *et* $p : q$ *deux fractions (irréductibles) successives de la suite d'Hermite; trouver la suivante*, $P : Q$.

D'après le n° 1, ω étant positif, on peut supposer tous les p_0, p, P, ..., q_0, q, Q, ... positifs.

5. Soient d le *dernier* domaine, d' le *premier* domaine, *de pointe* $p : q$, que traverse la droite $x = \omega$, parcourue de ∞ à ω. Il est clair qu'elle *sort* de d par la *base* : car, autrement, le domaine dans lequel elle pénétrerait en quittant d serait adjacent à d le long d'un *côté*, donc aurait même pointe, $p : q$, que d. De même, la droite entre dans d' par la base.

Il suit de là que, au sortir de d, la droite pénètre dans un domaine, D, qui est *adjacent à d par la base;* d'ailleurs, en vertu des définitions ci-dessus, la pointe de D est $P : Q$.

Effectuons alors la substitution modulaire (2) qui transforme d en D_0; elle transforme D en le domaine adjacent à D_0 par la base, c'est-à-dire en D_1. Donc, aux points $z = p : q$ et $z = P : Q$, pointes de d et D, elle fait correspondre respectivement $\zeta = \infty$ et $\zeta = 0$, pointes de D_0 et D_1, c'est-à-dire qu'on a

$$(3) \qquad \frac{a}{c} = \frac{p}{q} \quad \text{et} \quad \frac{b}{d} = \frac{P}{Q}.$$

Comme, en vertu de $ad - bc = 1$, a et c, ainsi que b et d, sont

premiers entre eux et qu'il en est de même de p et q, P et Q, on a nécessairement

$$\begin{matrix} a = \varepsilon_1 p, & b = \varepsilon_2 \mathrm{P} \\ c = \varepsilon_1 q, & d = \varepsilon_2 \mathrm{Q} \end{matrix} \qquad (\varepsilon_1, \varepsilon_2 = \pm 1);$$

d'où l'on conclut

$$(4) \qquad p\mathrm{Q} - q\mathrm{P} = \varepsilon_1 \varepsilon_2 = \varepsilon' \qquad (\varepsilon' = \pm 1).$$

On aurait de même

$$(5) \qquad pq_0 - qp_0 = \eta \qquad (\eta = \pm 1).$$

L'équation (5) exprime une importante propriété de la suite d'Hermite, établie par Hermite d'une manière toute différente [1].

6. Observons maintenant que les *sommets* des domaines modulaires de pointe ∞ sont tous situés (*fig.* 1) sur la droite AB, d'équation $y = \sqrt{3} : 2$; on en conclut aisément que les sommets des domaines modulaires de pointe $p : q$ sont sur une circonférence $\mathcal{C}$ (*fig.* 2), d'équation [2]

$$(6) \qquad q^2(\xi^2 + \eta^2) - 2pq\xi - \frac{2}{\sqrt{3}}\eta + p^2 = 0,$$

qui touche Ox au point d'abscisse $p : q$.

Cela posé, η étant l'unité ± 1 qui figure au second membre de (5), faisons la substitution

$$(7) \qquad z = \frac{p\zeta + p_0\eta}{q\zeta + q_0\eta},$$

qui est modulaire, d'après (5). Elle change les points $z = p : q$ et $p_0 : q_0$ respectivement en $\zeta = \infty$ et $\zeta = 0$; les domaines de pointe $p : q$ deviennent donc les domaines de pointe ∞, et, ceux de pointe $p_0 : q_0$, les domaines de pointe 0. En particulier, d', premier domaine de

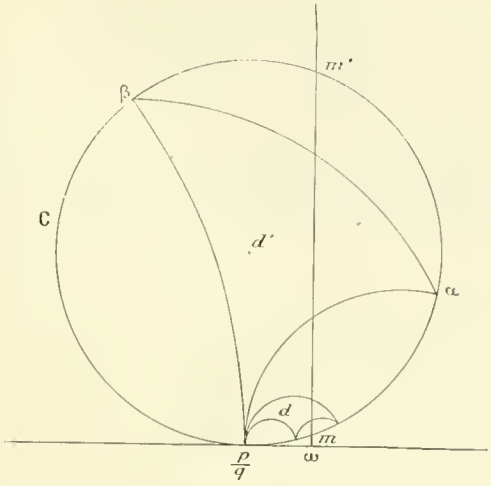
---

(1) En réalité, c'est une propriété *de la figure modulaire* : si deux domaines, de pointes $a' : c'$ et $b' : d'$ sont adjacents par la base, on a $a'd' - b'c' = \pm 1$.

(2) On obtient cette équation en effectuant une substitution modulaire, d'ailleurs quelconque, changeant $\zeta = \infty$ en $z = p : q$ et cherchant la transformée de la droite $y = \sqrt{3} : 2$.

pointe $p:q$, et δ', dernier domaine de pointe $p_0:q_0$, traversés par $x=\omega$, domaines adjacents par la base (n° 5), deviennent respectivement D_0 et D_1 : car D_0 et D_1 forment le seul couple de domaines, de pointes respectives ∞ et o, qui soient adjacents par la base.

Fig. 2.



Dès lors, la demi-droite $x=\omega$ devient une demi-circonférence C, orthogonale à Ox, qui passera de D_1 à D_0 en traversant la base commune, AB, de ces deux domaines (*fig.* 1).

La circonférence $\mathcal{C}$ devient la droite AB, soit $y=\sqrt{3}:2$, qui contient les sommets des domaines de pointe ∞, et les deux points, *que nous appellerons m' et m* (*fig.* 2), où $x=\omega$ coupe $\mathcal{C}$ se transforment respectivement en deux points, M' et M, de la droite $y=\sqrt{3}:2$.

La base commune, $\alpha\beta$, de δ' et de d', devient l'*arc* AB (*fig.* 1); l'arc $\alpha m'\beta$ de $\mathcal{C}$ devient la *corde* AB. Il résulte de là que M' (transformé de m') est sur cette corde : il est donc dans le domaine D_1. Inversement, *m' est dans le domaine* δ'.

Par une raison semblable, m est dans le domaine D, où pénètre la droite $x=\omega$ au sortir de d.

Cette remarque va nous permettre de déterminer D et sa pointe : il suffira de chercher à quel domaine appartient M; si ζ est la pointe de celui-ci, on aura la pointe z, de D (c'est-à-dire P : Q), par la for-

mule (7). Or, par la figure modulaire (*fig.* 1), la pointe du domaine qui contient un point M de la droite AB est l'entier, σ, tel que $\sigma - \frac{1}{2}$ et $\sigma + \frac{1}{2}$ comprennent l'abscisse de M : *tout revient donc à calculer cette abscisse.*

On trouve aisément, par (6), pour le z de m,

$$z = \omega + \frac{i}{q^2}\left[\frac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt{\frac{1}{3} - q^2(p - q\omega)^2}\right]; \tag{8}$$

celui de m' n'en diffère que par le changement de signe du second radical [1]; portant la valeur ci-dessus de z dans (7), on en déduira ζ et la partie réelle de ζ sera l'abscisse cherchée de M. Le résultat est le suivant.

Soit posé

$$q(p - q\omega) = \varepsilon u, \tag{9}$$

ε désignant ± 1, et ayant le signe de $p - q\omega$, *en sorte que u est toujours positif* [2]; l'abscisse de M sera

$$-\eta\frac{q_0}{q} + \frac{\varepsilon}{2u}\left(1 + \sqrt{1 - 3u^2}\right); \tag{10}$$

celle de M′ sera la même, avec le signe — devant le radical; quant à η, c'est toujours l'unité ± 1 définie par (5).

---

(1) *Remarque.* — Il est clair que, si $p : q$ est une fraction d'Hermite pour ω, la droite $x = \omega$ doit rencontrer $\mathcal{C}$, ce qui exige la réalité du radical dans (8); on a donc nécessairement

$$q^2(p - q\omega)^2 \leqq \frac{1}{3},$$

d'où l'on conclut

$$\left|\frac{p}{q} - \omega\right| \leqq \frac{1}{\sqrt{3}\,q^2}.$$

C'est l'inégalité fondamentale (n° **1**) qui exprime l'approximation d'Hermite; on a ainsi, de cette inégalité, une démonstration géométrique extrêmement simple.

(2) En vertu de $q|p - q\omega| \leqq \frac{1}{\sqrt{3}}$ (note précédente), on voit que $0 \leqq u \leqq \frac{1}{\sqrt{3}}$.

7. L'entier σ, défini plus haut, est tel que $\sigma - \frac{1}{2}$ et $\sigma + \frac{1}{2}$ comprennent le nombre (10); c'est donc le plus grand entier inférieur à la quantité (10) qu'on aurait augmentée de $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire le plus grand entier inférieur à

$$(11) \qquad -\eta\frac{q_0}{q} + \frac{\varepsilon}{2u}\left(1 + \sqrt{1 - 3u^2}\right) + \frac{1}{2}.$$

De même, le point M′ est dans un domaine de pointe σ', où σ' est le plus grand entier inférieur à

$$(12) \qquad -\eta\frac{q_0}{q} + \frac{\varepsilon}{2u}\left(1 - \sqrt{1 - 3u^2}\right) + \frac{1}{2}.$$

De là les conséquences suivantes :

1° P : Q, c'est-à-dire la fraction qui suit $p : q$, est donnée (n° 6) par le second membre de la formule (7), où l'on remplace ζ par σ; donc

$$(13) \qquad \frac{P}{Q} = \frac{p\sigma + p_0\eta}{q\sigma + q_0\eta}.$$

2° On a de même pour la fraction $p_0 : q_0$, qui précède $p : q$ (en introduisant M′ au lieu de M),

$$(14) \qquad \frac{p_0}{q_0} = \frac{p\sigma' + p_0\eta}{q\sigma' + q_0\eta}.$$

Chassant les dénominateurs, et tenant compte de $pq_0 - qp_0 = \eta$, on trouve $\sigma'\eta = 0$, d'où $\sigma' = 0$. En d'autres termes, le point M′ est, sur la droite AB, dans un domaine de pointe 0, donc dans D_1, ce qu'on savait déjà (n° 6).

3° Par la transformation (7), la corde $m'm$ est devenue l'arc de cercle, orthogonal à Ox, passant par M et M′, et situé *au-dessus* de la droite $y = \sqrt{3} : 2$: ce dernier point résulte de ce que, la corde $m'm$ traversant des domaines de pointe $p : q$, l'arc M′M doit traverser des domaines de pointe ∞.

Le nombre de ces domaines traversés par M′M est évidemment, comme le montre la figure modulaire, égal à $|\sigma - \sigma'| + 1$; ou encore, puisque $\sigma' = 0$, on peut dire que :

Le nombre des domaines de pointe $p:q$ traversés par la droite $x=\omega$ est égal à $|\sigma|+1$.

8. Ces domaines sont au nombre de *deux*, *au moins*, parce que la droite *pénètre* dans un premier domaine (de pointe $p:q$) par la base (n° 5) et *sort*, également par la base, d'un dernier domaine qui, dès lors, ne peut coïncider avec le précédent. On a donc nécessairement

$$|\sigma| \geqq 1.$$

Il résulte de là, puisque l'abscisse de M est entre $\sigma - \frac{1}{2}$ et $\sigma + \frac{1}{2}$, et celle de M′ entre $-\frac{1}{2}$ et $+\frac{1}{2}$ (car $\sigma' = 0$), que la différence entre l'abscisse de M et celle de M′ a le signe de σ. D'autre part, en vertu de (10), cette différence étant $\varepsilon\sqrt{1-3u^2}:u$, on conclut que *$\sigma$ a le signe de ε.*

Désignons alors $\varepsilon\sigma$, c'est-à-dire $|\sigma|$, par θ; nous pouvons écrire (13)

$$\frac{P}{Q} = \frac{p\theta + p_0\varepsilon\eta}{q\theta + q_0\varepsilon\eta}, \qquad (\text{et } \theta = |\sigma| \geqq 1). \tag{15}$$

Le numérateur et le dénominateur au second membre sont premiers entre eux, à cause de (5); on a supposé que P et Q le sont aussi : donc P et Q, qui sont positifs, sont respectivement égaux, *au même signe près*, aux deux termes de la fraction second membre. Étudions donc le signe de ces termes.

9. Je dis qu'ils sont tous deux positifs, et il suffira de le démontrer pour le dénominateur, $q\theta + q_0\varepsilon\eta$.

1° Soit d'abord $\varepsilon\eta = +1$; comme θ est $\geqq 1$, la proposition est évidente, et de plus on a $Q > q$.

2° Soit $\varepsilon\eta = -1$. Cela exprime [(5) et (9)] que $p - q\omega$ et $pq_0 - qp_0$ sont de signes contraires, c'est-à-dire que les pointes $p_0:q_0$ et $p:q$ sont d'un même côté de la droite $x=\omega$.

Or, par la substitution modulaire (7), la demi-droite $x=\omega$ est devenue (n° 6) une *demi-circonférence*, C, orthogonale à Ox; celle-ci laissera dès lors les pointes ∞ et o d'un même côté, donc à son

extérieur. De plus, en vertu du n° **6**, C traverse nécessairement l'arc AB, base commune de D_0 et de D_1.

De ces deux propriétés de C on conclut de suite (figure 1, où C est représentée en traits plus forts, dans deux de ses positions possibles) que C coupe Ox en un premier point d'abscisse inférieure à 1 (en valeur absolue) et, en un second point, d'abscisse supérieure à 2 (en valeur absolue), ces deux abscisses étant de même signe. Par suite, C traverse au moins *trois* domaines de pointe ∞. Dès lors (n° **7**, 3°), on a

$$|\sigma| + 1 \geqq 3 \qquad \text{ou} \qquad |\sigma| = \theta \geqq 2,$$

en sorte que le dénominateur, au second membre de (14), à savoir $q\theta - q_0$, est au moins égal à $2q - q_0$.

Or, les deux premières fractions d'Hermite sont $1 : 0$ et $\theta_0 : 1$ (où θ_0 entier $\geqq 0$) : elles vérifient $q > q_0$; si donc nous admettons que, jusqu'à $p : q$, inclus, les dénominateurs des fractions d'Hermite vont en croissant, nous voyons que $2q - q_0$ est > 0 et supérieur à q; ce qui entraîne $Q = q\theta - q_0 > q$. Il résulte de là les conséquences suivantes :

10. 1° *Les dénominateurs, dans la suite d'Hermite, vont en croissant sans cesse.*

Car si l'on admet qu'ils vont en croissant jusqu'à q, inclus, on vient de voir que le dénominateur suivant, Q, est toujours supérieur à q.

2° Le dénominateur du second membre de (15) est, d'après cela, toujours positif (car $q > q_0$ et $\theta \geqq 1$); donc on aura toujours

$$(15') \qquad P = p\theta + \varepsilon\eta p_0, \qquad Q = q\theta + \varepsilon\eta q_0.$$

3° On verrait de même que les numérateurs, dans la suite d'Hermite, croissent, à partir de la seconde fraction tout au moins. La propriété résultera d'ailleurs de ce fait, établi plus loin, que la suite d'Hermite se déduit de celle des réduites ordinaires de ω en y *supprimant* certains termes.

11. *Résumé.* — Soient $p_0 : q_0$ et $p : q$ deux fractions d'Hermite consécutives pour le nombre ω; on a nécessairement

$$pq_0 - qp_0 = \eta \qquad (\eta = \pm 1).$$

La fraction suivante, P : Q, s'obtient comme il suit :

Soit posé $\varepsilon u = q(p - q\omega)$, ε étant ± 1, choisi de manière que u soit positif, c'est-à-dire ε étant du signe de $p - q\omega$; désignons par θ la valeur absolue de l'entier σ, qui est le plus grand entier inférieur à la quantité (11) : on reconnaît de suite [1] que θ est l'entier maximum contenu dans la quantité

$$\left| -\eta \frac{q_0}{q} + \frac{\varepsilon}{2u}\left(1 + u + \sqrt{1 - 3u^2}\right) \right|,$$

qui est évidemment aussi la valeur absolue de

$$(16) \qquad -\varepsilon\eta \frac{q_0}{q} + \frac{1}{2u}\left(1 + u + \sqrt{1 - 3u^2}\right).$$

Mais cette dernière quantité est positive. En effet, puisque

$$0 \leqq u \leqq 1 : \sqrt{3} \text{ (n° 6)} \qquad \text{et} \qquad q_0 < q \text{ (n° 10)},$$

et que d'ailleurs le minimum du second terme de (16) a lieu pour $u = 1 : \sqrt{3}$, la quantité (16) reste *supérieure* à $-1 + \frac{\sqrt{3}+1}{2}$, quantité positive.

Donc enfin, θ *étant l'entier (positif) maximum contenu dans la quantité* (16), ε *et* η *les unités* ± 1 *définies ci-dessus, on a*

$$(17) \qquad P = p\theta + \varepsilon\eta p_0, \qquad Q = q\theta + \varepsilon\eta q_0.$$

D'ailleurs, θ est $\geqq 1$; et même, si $\varepsilon\eta = -1$, θ est $\geqq 2$.

---

[1] Soit en effet A la quantité (11), à savoir

$$-\eta \frac{q_0}{q} + \frac{\varepsilon}{2u}\left(1 + \sqrt{1 - 3u^2}\right) + \frac{1}{2};$$

on a, par définition de σ,

$$\sigma < A < \sigma + 1.$$

Si $\varepsilon = +1$, σ, qui a le signe de ε (n° 8), est > 0, ainsi dès lors que A, et la proposition est évidente, puisque, ici, $\theta = \sigma$. Si $\varepsilon = -1$, on déduit des inégalités précédentes $\sigma\varepsilon > A\varepsilon > \varepsilon\sigma + \varepsilon$; ou, puisque $\theta = \varepsilon\sigma$,

$$\theta < -A + 1 < \theta + 1,$$

ce qui montre que θ est l'entier maximum contenu dans $-A + 1$, ou dans $|A - 1|$, puisque θ est positif. De là encore la proposition à établir.

Enfin (n° 7, 3°), $\theta + 1$ *est le nombre des domaines de pointe* $p : q$ *traversés par la droite* $x = \omega$.

On sait donc, à partir des deux premières fractions, $1 : 0$ et $\theta_0 : 1$ (n° 4), former successivement toutes les fractions de la suite d'Hermite.

12. *Remarque.* — Il ne figure, dans (16) et (17), que l'unité $\varepsilon\eta$; par définition de ε et η, elle est $+1$ si ω et $p_0 : q_0$ sont d'un même côté de $p : q$; elle est -1 s'ils sont de part et d'autre de $p : q$.

On pourrait, dans la formation de P et de Q, *faire abstraction complète* de p_0 et q_0, c'est-à-dire *de la fraction qui précède* $p : q$.

Soit, en effet, q'_0 la solution comprise entre 0 et q (c'est-à-dire la plus petite solution positive) de la congruence $pq'_0 \equiv \varepsilon \pmod{q}$; on voit de suite que $q'_0 = q_0$ si $\varepsilon\eta = +1$, et $q'_0 = q - q_0$ si $\varepsilon\eta = -1$. On en déduit aisément, pour P et Q, les valeurs suivantes :

$$Q = qs + q'_0, \qquad P = ps + p'_0,$$

où $p'_0 = \frac{pq'_0 - \varepsilon}{q}$, et où s désigne l'entier maximum contenu dans la quantité

$$-\frac{q'_0}{q} + \frac{1}{2u}\left(1 + u + \sqrt{1 - 3u^2}\right);$$

seulement s, qui est θ si $\varepsilon\eta = 1$, et $\theta - 1$ si $\varepsilon\eta = -1$, n'est plus, *dans tous les cas*, le nombre des domaines de pointe $p : q$ traversés par la droite. Comme nous aurons à faire, en une autre occasion, une application importante de cette propriété de θ, nous avons donné la préférence aux formules (17).

Fractions d'Hermite « a priori ».

13. Nous allons maintenant aborder le problème inverse de celui de la formation régulière de la suite d'Hermite, c'est-à-dire le suivant :

Reconnaître si une fraction irréductible donnée $p : q$ *est une fraction d'Hermite pour le nombre* ω.

Pour que $p : q$ soit fraction d'Hermite, il faut et il suffit que la droite $x = \omega$ pénètre dans un domaine (au moins) de pointe $p : q$.

Soit toujours posé

$$q(p - q\omega) = u\varepsilon \qquad (\varepsilon = \pm 1 \text{ et } u > 0);$$

nous désignerons par p'_0 et q'_0 deux entiers positifs définis ainsi : q'_0 est *la* solution (positive) comprise entre 0 et q de la congruence

$$pq'_0 \equiv \varepsilon \qquad (\operatorname{mod} q)$$

qui entraîne

$$pq'_0 = \varepsilon + qp'_0, \tag{18}$$

d'où p'_0. Il est clair que p'_0 est positif, puisque p, q, q'_0 le sont.

Effectuons alors la substitution, qui est *modulaire* [en vertu de 18)],

$$z = \frac{p\zeta + \varepsilon p'_0}{q\zeta + \varepsilon q'_0}; \tag{19}$$

elle change $z = p : q$ et $p'_0 : q'_0$ en $\zeta = \infty$ et 0, et la demi-droite $x = \omega$ en une demi-circonférence, C, qui coupe la droite $y = \sqrt{3} : 2$ en deux points, M et M′, dont les abscisses, par un calcul déjà fait, sont

$$-\varepsilon\frac{q'_0}{q} + \frac{\varepsilon}{2u}(1 + \sqrt{1 - 3u^2}) \qquad \text{et} \qquad -\varepsilon\frac{q'_0}{q} + \frac{\varepsilon}{2u}(1 - \sqrt{1 - 3u^2}),$$

et tout revient à exprimer que C pénètre dans un domaine, au moins, de pointe ∞. On le fera évidemment en écrivant que M′ et M, qui appartiennent à des domaines de pointe entière, ne sont pas dans le même domaine, c'est-à-dire qu'entre leurs abscisses, augmentées (ou diminuées) de $\frac{1}{2}$, il y a au moins un entier; donc, que *les deux nombres*

$$-\frac{q'_0}{q} + \frac{1}{2u}(1 + u - \sqrt{1 - 3u^2}), \tag{20}$$

$$-\frac{q'_0}{q} + \frac{1}{2u}(1 + u + \sqrt{1 - 3u^2}), \tag{21}$$

comprennent entre eux un entier, au moins.

Telle est la condition nécessaire et suffisante pour que $p : q$ soit fraction d'Hermite, pour ω.

14. *Transformation de la condition.* — Présentons d'abord quelques remarques :

1° Naturellement, les nombres (20) et (21) doivent être réels, c'est-à-dire qu'on doit avoir $u \leqq 1 : \sqrt{3}$, ce qu'on savait être nécessaire *a priori* (approximation d'Hermite).

2° La différence entre les deux mêmes nombres est $\sqrt{1-3u^2} : u$; si elle est $\geqq 1$, c'est-à-dire *si* $u \leqq \frac{1}{2}$, *la condition ci-dessus est sûrement remplie, et* $p : q$ *est donc sûrement une fraction d'Hermite.*

3° Reste donc le cas où

$$\frac{1}{2} < u \leqq \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Je dis qu'alors les nombres (20) et (21) ne peuvent comprendre entre eux d'autre entier que 1.

En effet, les deux quantités $(1 + u \pm \sqrt{1-3u^2}) : 2u$ sont positives pour u compris entre $1 : 2$ et $1 : \sqrt{3}$; le *minimum* de celle qui correspond au signe $-$ et le *maximum* de celle qui correspond au signe $+$ ont lieu, dans cet intervalle, pour $u = 1 : 2$, et sont respectivement 1 et 2. Comme $q'_0 : q$ est > 0 et < 1, par définition de q'_0, il en résulte que le nombre (20) est supérieur à zéro et le nombre (21) inférieur à 2, ce qui établit la proposition.

Exprimons donc que les deux nombres comprennent 1; nous trouvons, sans difficulté, les inégalités

$$(22) \qquad \begin{cases} \sqrt{1-3u^2} > -2u\dfrac{q'_0}{q} - u + 1, \\ \sqrt{1-3u^2} > 2u\dfrac{q'_0}{q} + u - 1. \end{cases}$$

Les seconds membres étant égaux et de signes contraires, les inégalités (22) se résument en celle-ci :

$$(\sqrt{1-3u^2})^2 > \left(2u\frac{q'_0}{q} + u - 1\right)^2,$$

qui, après développement et division par le facteur positif u, s'écrit

$$(23) \qquad u < \frac{q(q+2q'_0)}{2(q^2+qq_0+q_0'^2)}.$$

Ainsi $p:q$, pour $u \leqq 1:2$, est toujours fraction d'Hermite; pour $\frac{1}{2} < u \leqq 1:\sqrt{3}$, elle le sera seulement si (23) est satisfaite.

Mais on voit de suite, en s'appuyant sur $q'_0 < q$, que le second membre de (23) est *supérieur* à $1:2$; il en résulte que (23) est satisfaite d'elle-même lorsque u est $\leqq 1:2$. On peut donc dire que la condition (23), jointe à $u \leqq 1:\sqrt{3}$, est la condition nécessaire et suffisante pour que $p:q$ soit fraction d'Hermite.

On peut même ajouter que (23) entraîne $u \leqq 1:\sqrt{3}$; je dis en effet que le second membre de (23) est *inférieur* à $1:\sqrt{3}$, c'est-à-dire qu'on a

$$2q_0'^2 + 2qq'_0(1-\sqrt{3}) + q^2(2-\sqrt{3}) > 0,$$

ce qui a lieu, le premier membre étant un carré [1].

Donc enfin :

Règle. — *L'inégalité* (23) *est la seule condition nécessaire et suffisante pour que la fraction irréductible $p:q$ soit de la suite d'Hermite, pour le nombre* ω [2].

Rappelons que $u = \varepsilon q(p - q\omega)$, ε étant ± 1, choisi de manière que u soit positif; et que q'_0 est *la plus petite solution positive* de la congruence $pq'_0 \equiv \varepsilon \pmod{q}$.

Comparaison avec la suite des réduites.

15. La condition nécessaire et suffisante (unique) pour qu'une fraction irréductible, $p:q$, soit une *réduite* de ω, dans le développe-

---

(1) Si $p:q$ est fraction d'Hermite, on sait que u est compris entre 0 et $1:\sqrt{3}$; ces deux limites peuvent-elles être atteintes par u?

D'abord $u = 0$ exigerait $p - q\omega = 0$, donc ω rationnel.

Ensuite, $u = 1:\sqrt{3}$ ne pourrait être atteint, en vertu de (23), que si

$$2q_0'^2 + 2qq'_0(1-\sqrt{3}) + q^2(2-\sqrt{3}) < 0,$$

ce qui est impossible, en vertu du texte ci-dessus.

(2) On vérifierait aisément que (23) exprime que ω est compris entre la plus petite et la plus grande des abscisses qui correspondent aux *sommets* des domaines modulaires de pointe $p:q$.

ment de ω en fraction continue ordinaire, est bien connue [1] depuis Lagrange et peut recevoir la forme suivante :

Soit toujours posé

$$u = \varepsilon q(p - q\omega) \qquad (\varepsilon = \pm 1 \text{ et } u > 0);$$

q'_0 désignant encore la plus petite solution positive de la congruence $pq'_0 \equiv \varepsilon \pmod{q}$, la condition considérée s'écrit

$$u < \frac{q}{q + q'_0}. \tag{24}$$

Or il est remarquable que le second membre de (24) est toujours *supérieur* à celui de (23) : l'inégalité

$$\frac{q(q + 2q'_0)}{2(q^2 + qq'_0 + q'^2_0)} < \frac{q}{q + q'_0}$$

revient en effet à la suivante, $qq'_0 < q^2$, qui est satisfaite, puisque

$$q'_0 < q.$$

Il suit de là que, si u vérifie (23), il vérifie *a fortiori* (24), c'est-à-dire que :

Toute fraction d'Hermite pour ω est une réduite ordinaire de ω.

16. La *réciproque* n'est pas vraie, car (24) n'entraîne pas (23). Toutefois, si $u \leqq 1 : 2$, on a vu plus haut (n° **14**, 2°) que $p : q$ (réduite de ω ou non) est sûrement une fraction d'Hermite. Or $u \leqq \frac{1}{2}$ s'écrit

$$\left| \frac{p}{q} - \omega \right| \leqq \frac{1}{2q^2}.$$

Supposons que $p : q$ soit une réduite; cette inégalité est sûrement vérifiée si le *quotient incomplet* qui suit $p : q$ dans la fraction continue donnant ω, c'est-à-dire celui auquel on s'est arrêté (*exclusivement*) pour calculer la réduite $p : q$, est égal ou supérieur à 2 (propriété classique des réduites); donc :

---

[1] *Voir* LEGENDRE, *Théorie des Nombres*, t. I, n° 9, p. 25; SERRET, *Algèbre supérieure*, t. I, p. 19. Il y a peut-être un peu d'incertitude dans les démonstrations données par ces deux auteurs, mais le résultat est exact.

Si, dans la fraction continue représentant ω, *un quotient incomplet est supérieur à* 1, *la réduite qui le précède (c'est-à-dire qui est arrêtée à ce quotient exclus) est sûrement une fraction d'Hermite.*

Reste donc seulement le cas d'une réduite arrêtée à un quotient incomplet 1 (exclus); il faut alors, pour reconnaître si elle est ou non fraction d'Hermite, avoir recours à la condition fondamentale (23).

Il peut ainsi arriver qu'une telle réduite, $p : q$, quoique vérifiant l'inégalité d'Hermite

$$\left|\frac{p}{q} - \omega\right| \leqq \frac{1}{\sqrt{3}\, q^2}$$

ne soit pas fraction d'Hermite.

17. *Remarque.* — Supposons toujours que $p : q$ soit une réduite de ω : les entiers p'_0 et q'_0 introduits au n° **15** ont alors une signification arithmétique simple.

Soit, en effet, $p' : q'$ *la réduite de* ω *qui précède* $p : q$; on sait que ω est compris entre $p' : q'$ et $p : q$, c'est-à-dire que $\frac{p}{q} - \omega$ et $\frac{p}{q} - \frac{p'}{q'}$ sont de même signe, donc aussi $p - q\omega$ et $pq' - qp'$. Mais $p - q\omega$ a le signe de ε; d'autre part $pq' - qp'$ étant ± 1, par une propriété classique des réduites, il s'ensuit que

$$pq' - qp' = \varepsilon.$$

Et comme q' est > 0 et $< q$, on en conclut $q'_0 = q'$ et $p'_0 = p'$, par définition même de q'_0 et p'_0. Ainsi :

Quand $p : q$ *est une réduite de* ω, *les* p'_0 *et* q'_0 *du n°* **15** *sont le numérateur et le dénominateur de la réduite précédente.*

La condition (23), qui exprime que $p : q$ est fraction d'Hermite, peut alors s'écrire autrement.

Soient

$$\omega = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{x}}},$$

$$x = a_n + \cfrac{1}{a_{n+1} + \ddots}, \qquad \frac{p}{q} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \ddots + \cfrac{1}{a_{n-1}}}.$$

On a

$$\omega = \frac{px + p'_0}{qx + q_0}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{1}{u} = x + \frac{q'_0}{q},$$

et (23) prend la forme

$$x > \frac{2q + q'_0}{q + 2q'_0}, \tag{25}$$

$p'_0 : q'_0$ étant la réduite de ω qui précède $p : q$.

Suite d'Hermite.

18. C'est la suite, S, des fractions d'Hermite, dans l'ordre où elles se présentent quand on les trouve en parcourant la demi-droite $x = \omega$ de ∞ à ω.

Tous les termes de S figurent dans la suite, S_0, des réduites de ω (n° **15**).

De plus, dans S (n° **10**), comme dans S_0, les dénominateurs des termes successifs vont en croissant : donc, on passera de S_0 à S en supprimant, dans S_0, certaines réduites, et l'on obtiendra ainsi S, *ordre des termes compris.*

D'après le n° **16**, les réduites à supprimer ainsi ne peuvent être prises *que parmi celles* qui précèdent un quotient incomplet égal à 1; et, pour qu'une de ces dernières soit à conserver, il suffit que soit vérifiée par elle l'inégalité (23), ou son équivalente (25).

On pourra même rejeter de suite les réduites (précédant le quotient incomplet 1) pour lesquelles u serait supérieur à $1 : \sqrt{3}$.

19. Théorème. — *On n'aura jamais à supprimer, dans la suite des réduites, deux réduites consécutives.*

Soient quatre réduites consécutives

$$\frac{p'_0}{q'_0}, \quad \frac{p}{q}, \quad \frac{p'}{q'}, \quad \frac{P}{Q};$$

supposons qu'on ait à supprimer les deux du milieu. Alors, les quotients incomplets suivants étant 1, on aurait, par la formule classique

des réduites,

$$p' = p + p'_0, \qquad P = p' + p = 2p + p'_0;$$
$$q' = q + q'_0, \qquad Q = q' + q = 2q + q'_0.$$

Mais $p'_0 : q'_0$ et $P : Q$ étant maintenant deux fractions *consécutives* d'Hermite, on aurait (n° 5)

$$Pq'_0 - Qp'_0 = \pm 1.$$

Des valeurs ci-dessus de P et Q on déduit, d'autre part,

$$Pq'_0 - Qp'_0 = 2(pq'_0 - qp'_0) = \pm 2$$

(puisque $p'_0 : q'_0$ et $p : q$ sont deux réduites consécutives), ce qui contredit l'équation précédente.

A fortiori, on n'aura jamais à supprimer trois, quatre, ... réduites consécutives.

20. *Cas où ω est rationnel.* — Toute la théorie faite pour ω irrationnel s'applique au cas de ω rationnel (la suite d'Hermite étant alors finie), sauf une exception.

On a admis en effet (Remarque à la fin du n° 5) que la droite $x = \omega$ ne sortait jamais d'un domaine modulaire par un sommet (ce qui est sûrement vérifié quand ω est irrationnel); pour ω rationnel, il faudra dès lors exclure le cas où, sur la droite, il y aurait un ou plusieurs *sommets* modulaires. On reconnaîtrait aisément que, dans ce cas d'exception, ω est de la forme

$$(\varphi) \qquad \omega = \frac{2a - 1}{2c},$$

a et c étant des entiers, de signe quelconque, vérifiant la congruence $a^2 - a + 1 \equiv 0 \pmod{c}$.

21. *Exemple.* — Soit $\omega = \frac{445}{99^2}$, qui *n'est pas* du type (φ). On trouve, pour la suite des réduites $\left(\text{en la faisant précéder de } \frac{1}{0}\right)$,

$$(S_0) \qquad \frac{1}{0}, \quad \frac{0}{1}, \quad \frac{1}{2}, \quad \underline{\frac{10}{21}}, \quad \underline{\frac{11}{23}}, \quad \frac{21}{44}, \quad \frac{53}{111}, \quad \frac{445}{99^2}.$$

On a souligné les réduites qui précèdent le quotient incomplet 1; il s'agit de reconnaître si elles figurent, ou non, dans la suite d'Hermite (S).

Soit d'abord $\frac{10}{21}$. On a

$$u = 21\,|\,10 - 21\,\omega\,| = \frac{25 \times 21}{932}.$$

Cette valeur de u est $< \frac{1}{\sqrt{3}}$; néanmoins, la réduite est à supprimer, parce que la condition (23) s'écrit ici

$$\frac{21 \times 25}{932} < \frac{21}{2}\,\frac{21 + 2 \times 2}{21^2 + 2 \times 21 + 2^2},$$

ce qui n'est pas vérifié.

Ainsi $\frac{10}{21}$, bien que donnant, pour ω, l'approximation d'Hermite, est à supprimer.

Il est alors inutile de faire le calcul pour $\frac{11}{23}$, car c'est la réduite *suivante* et l'on ne supprime jamais deux réduites consécutives. La suite d'Hermite est donc

$$\text{(S)} \qquad \frac{1}{0},\ \frac{0}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{11}{23},\ \frac{21}{44},\ \frac{53}{111},\ \frac{445}{932}.$$

On vérifie, sur cet exemple, que les fractions d'Hermite ne sont pas toujours alternativement de part et d'autre de ω; car $\frac{1}{2}$ et $\frac{11}{23}$, réduites dont les rangs sont de même parité, ne comprennent pas ω entre elles.

Développement hermitien de ω.

22. Soit la fraction continue (unique) qui représente ω :

$$\omega = h_0 + \frac{1}{h_1 + \ddots} \qquad (h_0 \geqq 0;\ h_1, h_2, \ldots \geqq 1).$$

La première réduite (abstraction faite de $1 : 0$) est $h_0 : 1$; si $h_1 = 1$, elle est à supprimer; si $h_1 > 1$, à conserver dans la suite d'Hermite.

En effet, dans celle-ci, la première fraction (après $1:0$) est $\theta_0:1$, où θ_0 désigne l'entier *le plus voisin* de ω, et θ_0 est h_0 *ou* h_0+1, selon que $|\omega-h_0|$ est inférieur *ou* supérieur à $1:2$. D'autre part, si $h_1=1$, il est clair que $|\omega-h_0|$ est supérieur à $\frac{1}{2}$; donc que $\theta_0=h_0+1$; ce qui montre que la réduite $h_0:1$ est à rejeter.

Supposons, plus généralement, que la *première* réduite à supprimer soit celle qui précède h_n; alors $h_n=1$, et l'on peut écrire identiquement :

$$\omega=h_0+\cfrac{1}{h_1+\ddots+\cfrac{1}{(h_{n-1}+1)-\cfrac{1}{(h_{n+1}+1)+\cfrac{1}{h_{n+2}+\ddots}}}},$$

car

$$\cfrac{1}{h_{n-1}+\cfrac{1}{h_n+\cfrac{1}{h_{n+1}}}}=\cfrac{1}{(h_{n-1}+1)-\cfrac{1}{(h_{n+1}+1)}}.$$

Continuons à appliquer le même procédé au premier quotient incomplet 1 qui se présente dans cette nouvelle expression de ω, *et qui précède une réduite à supprimer*, et ainsi de suite; nous obtenons, pour ω, ce que nous appellerons le *développement hermitien :*

$$\omega=\theta_0+\cfrac{\varepsilon_1}{\theta_1+\cfrac{\varepsilon_2}{\theta_2+\ddots+\cfrac{\varepsilon_{n-1}}{\theta_{n-1}+\cfrac{\varepsilon_n}{\theta_n+\ddots}}}}, \tag{26}$$

les ε_i étant ± 1, et les θ_i étant des entiers *supérieurs à* 0, sauf θ_0, qui peut être nul. De plus, il résulte du mode même de formation de (26), à partir de la fraction continue, que

$$\theta_k\geqq 2 \quad \text{si} \quad \varepsilon_k \textit{ ou } \varepsilon_{k+1}=-1;$$
$$\theta_k\geqq 3 \quad \text{si} \quad \varepsilon_k \textit{ et } \varepsilon_{k+1}=-1.$$

Quant à θ_0, il est $\geqq 1$, si $\varepsilon_1=-1$.

23. Théorème. — *Si, dans* (26), *on s'arrête aux quotients incomplets successifs*, c'est-à-dire si l'on forme les fractions

$$\frac{\theta_0}{1},\quad \theta_0+\frac{\varepsilon_1}{\theta_1},\quad \theta_0+\cfrac{\varepsilon_1}{\theta_1+\cfrac{\varepsilon_2}{\theta_2}},\quad \ldots,$$

on obtient exactement la suite d'Hermite (sauf le terme initial 1 : 0); car, en s'appuyant sur le théorème du n° **19**, on voit de suite que les modifications par lesquelles on passe de la fraction continue au développement hermitien ont eu précisément pour résultat de supprimer les réduites (précédant un quotient incomplet 1) qui ne doivent pas figurer dans la suite d'Hermite.

24. *Exemple* (¹). — Soit $\omega=\frac{17}{10}$, qui n'est pas du type (φ). La fraction continue est

$$\omega=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3}}}.$$

La réduite qui précède le second quotient $h_1=1$ est à supprimer (n° **22**); de là le développement hermitien

$$\omega=2+\cfrac{-1}{3+\cfrac{1}{3}}.$$

25. Théorème. — *Les quotients incomplets*, θ_k, *du développement hermitien reproduisent, dans le même ordre, les entiers successifs* θ, *rencontrés aux n^os* **8-11**.

(¹) *Remarque.* — Si, dans la fraction continue qui représente ω, on fait la modification indiquée au n° **22**, à partir du premier quotient incomplet $h_i\,(i>0)$, égal à 1, en continuant ainsi pour tous les quotients incomplets 1 qui se présentent successivement, on obtient, pour ω, un développement du type (26). Les fractions successives, $p_n : q_n$, que fournit ce développement sont intéressantes.

Sous une autre forme, en effet, si l'on pose $\omega=h_0\pm\frac{1}{\omega_1}$, h_0 étant l'entier le plus voisin de ω, et le signe $\pm$ étant choisi de manière que ω_1 soit positif; si de même on pose $\omega_1=h_1\pm\frac{1}{\omega_2}$, et ainsi de suite, le nouveau développement de ω

Soit en effet $p : q$ la fraction obtenue quand on s'arrête, dans (26), au terme θ_{n-1}, *inclus;* soient $p_0 : q_0$ et $P : Q$ les fractions précédente et suivante. On a, par une propriété classique des développements tels que (26),

$$P = p\theta_n + \varepsilon_n p_0, \qquad Q = q\theta_n + \varepsilon_n q_0.$$

Comparant aux formules (17), à savoir

$$P = p\theta + \varepsilon\eta p_0, \qquad Q = q\theta + \varepsilon\eta q_0,$$

on en déduit nécessairement (car $pq_0 - qp_0$, égal à ± 1, n'est pas nul)

$$\theta = \theta_n, \qquad \varepsilon_n = \varepsilon\eta.$$

Donc d'abord, les θ reproduisent les θ_n, ce qu'il s'agissait d'établir; ensuite ε_n est $+1$, ou -1, selon que $p_0 : q_0$ et ω sont, ou ne sont pas, d'un même côté de $p : q$.

---

coïncide avec le développement

$$\omega = k_0 \pm \cfrac{1}{k_1 \pm \cfrac{1}{k_2 \pm \ddots}}$$

qui a été étudié directement par M. Hurwitz (*Acta mathematica*, t. 12).

Par exemple, la fraction continue

$$\omega = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{5}}}}},$$

donne successivement :

$$\omega = 1 + \cfrac{1}{3 - \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{5}}}}, \qquad \omega = 1 + \cfrac{1}{3 - \cfrac{1}{3 - \frac{1}{6}}}.$$

On pourra également consulter, sur des approximations analogues, un Mémoire de M. Minkowski (*Math. Ann.*, t. 54, 1901).

Nota. — On peut transformer cette dernière propriété de la manière suivante. On a, toujours en vertu d'une propriété connue des développements tels que (26),

$$pq_0 - qp_0 = (-1)^n \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{n-1},$$

ce qui s'écrit, grâce à (5),

$$\eta = (-1)^n \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{n-1}.$$

Par $\varepsilon\eta = \varepsilon_n$, on en tire

$$\varepsilon = (-1)^n \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{n-1} \varepsilon_n;$$

ce qui montre que $\frac{p}{q} - \omega$ a le signe de $(-1)^n \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n$. De même, $\frac{p_0}{q_0} - \omega$ a le signe de $(-1)^{n-1} \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{n-1}$. Il s'ensuit que ε_n est égal à $+1$ quand ω est entre $p_0 : q_0$ et $p : q$; et à -1 dans le cas contraire.

26. Corollaire. — Si l'on se reporte à la signification géométrique des θ, donnée au n° **11**, on voit que :

Le quotient incomplet, θ_n, qui suit la fraction $p : q$ dans le développement (26) (¹), *jouit de cette propriété que $1 + \theta_n$ est le nombre des domaines modulaires de pointe $p : q$ traversés par la droite $x = \omega$.*

(¹) C'est-à-dire que $p : q$ est la fraction qu'on obtient quand on s'arrête, dans (26), au terme θ_{n-1} *inclusivement*.

Sur les fractions continues ordinaires et les formes quadratiques binaires indéfinies;

PAR G. HUMBERT.

1. Ce travail est divisé en trois Parties :

Dans la première on expose une intéressante interprétation géométrique des fractions continues, analogue à celle que donne le Mémoire précédent pour les fractions d'Hermite; elle conduit à une démonstration très simple du théorème de Lagrange sur la périodicité et rend intuitives plusieurs propriétés des réduites.

La deuxième Partie traite du *nombre de certaines formes réduites* qui équivalent à une forme quadratique binaire indéfinie, f, à coefficients entiers; nous étudions successivement, à ce point de vue, des *réduites* auxquelles nous donnons le nom de *Stephen Smith* et *les réduites de M. Hurwitz;* nous retrouvons aussi le théorème célèbre de Dirichlet sur le nombre des réduites de Gauss.

La troisième Partie fait connaître le nombre des *réduites d'Hermite équivalentes à f*. Les résultats obtenus semblent nouveaux; ils s'énoncent très simplement et rattachent les nombres cherchés à la *période* qui se présente dans le développement en fraction continue d'une racine de la forme, mais d'une manière tout autre que ne fait le théorème de Dirichlet, puisqu'ils introduisent, non seulement le nombre des termes de la période, mais les valeurs de ces termes eux-mêmes.

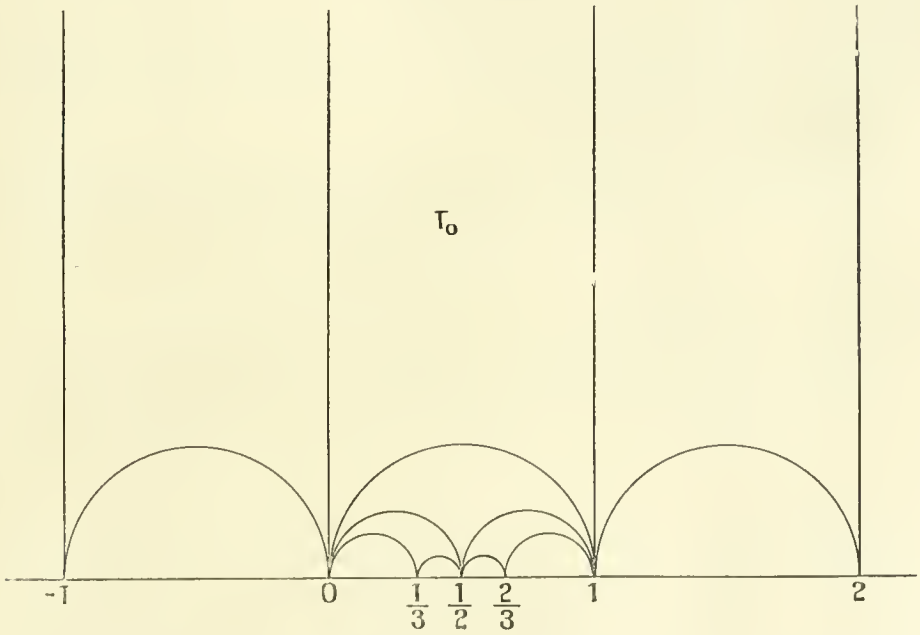
Enfin, après une étude de la période dans le développement hermitien d'une racine de la forme, on détermine le nombre des *réduites principales d'Hermite* équivalentes à celle-ci.

PREMIÈRE PARTIE.

Division de Stephen Smith.

2. Nous partirons de la division du demi-plan analytique en *triangles élémentaires* curvilignes, indiquée pour la première fois par Stephen Smith et étudiée (à un point de vue projectif) par M. Hurwitz [1].

Fig. 1.



Soit T_0 (*fig.* 1) le triangle formé par les droites $x = 0$, $x = 1$, et la demi-circonférence décrite sur le segment 01 comme diamètre; on prend les *symétriques* de T_0 par rapport à ses trois côtés [2], et l'on

(1) St. Smith, *Mémoire sur les équations modulaires* (*R. Acad. dei Lincei*, 1877, et *Œuvres*, t. II, p. 224). — Hurwitz, *Math. Annalen*, t. XLV, p. 85 et suiv.

(2) La symétrique d'une figure F par rapport à une circonférence c est l'*inverse* de F, quand on prend pour puissance et pour pôle le carré du rayon et le centre de c.

opère de même sur tous les triangles successivement obtenus. On divise ainsi la partie du plan au-dessus de Ox en une infinité de triangles circulaires, de côtés orthogonaux à Ox, et devenant infiniment petits, dans tous les sens, à mesure qu'on se rapproche de Ox.

Chaque triangle a ses trois angles nuls; les trois sommets sont sur Ox, sauf cependant dans la rangée supérieure, où un sommet est à l'infini.

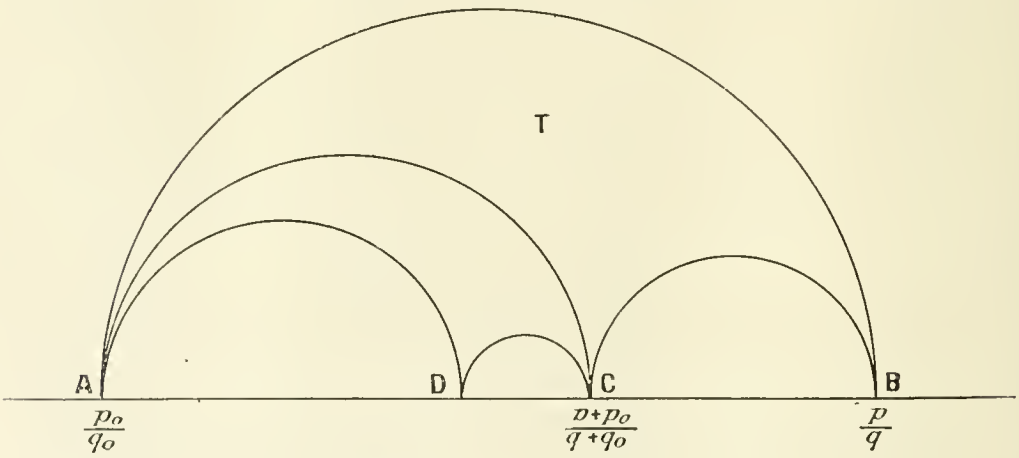
Toutes ces propriétés sont connues; les suivantes le sont également : nous en donnerons de brèves démonstrations en vue des lecteurs non familiarisés avec la figure modulaire, dont dérive celle de Smith.

3. Ne considérons d'abord que les triangles à droite de Oy; la symétrie de la division par rapport à cet axe étend d'elle-même les résultats à ceux de gauche.

Je dis que :

Les abscisses des sommets d'un triangle de Smith sont trois frac-

Fig. 2.



tions irréductibles, de la forme

$$(1) \qquad \frac{p_0}{q_0}, \quad \frac{p}{q}, \quad \frac{p+p_0}{q+q_0} \qquad (p, q, p_0, q_0 \geq 0)$$

avec

$$(1\ bis) \qquad pq_0 - qp_0 = \pm 1.$$

La proposition est vraie pour T_0, de sommets $\frac{1}{0}, \frac{0}{1}, \frac{1}{1}$; il suffit donc,

pour l'établir en général, de montrer que, si un triangle T de Smith (*fig.* 2) admet les trois sommets (1), soient A, B, C, ses symétriques par rapport à ses côtés ont aussi leurs sommets du type (1).

Or, on trouve aisément, pour les sommets des symétriques de T, par rapport à AC, BC et AB, les abscisses respectives

$$\frac{p_0}{q_0},\quad \frac{p+p_0}{q+q_0},\quad \frac{p+2p_0}{q+2q_0},$$

$$\frac{p+p_0}{q+q_0},\quad \frac{p}{q},\quad \frac{2p+p_0}{2q+q_0},$$

$$\frac{p_0}{q_0},\quad \frac{p-p_0}{q-q_0},\quad \frac{p}{q} \qquad \text{ou } (^1) \qquad \frac{p}{q},\quad \frac{p_0-p}{q_0-q},\quad \frac{p_0}{q_0};$$

d'où la proposition à établir.

4. *Réciproquement, si les trois sommets d'un triangle quelconque* Θ (*à côtés circulaires orthogonaux à* Ox) *sont du type* (1), Θ *est un triangle de Smith.*

Observons d'abord que des symétries faciles conduisent, à partir de T_0, au triangle de sommets $\frac{0}{1}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}$, qui est dès lors de Smith.

Cela posé, on peut admettre, sans diminuer la généralité, que $p > p_0$, et, par suite, $q > q_0$; le symétrique de Θ, par rapport au côté qui contient les sommets $p_0 : q_0$ et $p : q$, a les sommets

$$\frac{p_0}{q_0},\quad \frac{p}{q},\quad \frac{p-p_0}{q-q_0},$$

qui sont aussi du type (1); continuant les symétries, on arrive à un triangle, Θ_k, dont les sommets [toujours du type (1)] sont :

$$\frac{p_0}{q_0},\quad \frac{p-(k-1)p_0}{q-(k-1)q_0},\quad \frac{p-kp_0}{q-kq_0},$$

k désignant le quotient de la division de p par p_0; donc aussi de q par q_0, en vertu de $pq_0 - qp_0 = \pm 1$.

---

(1) Si $p > p_0$, ce qui entraîne, par (1 *bis*), $q > q_0$, on prendra $\frac{p-p_0}{q-q_0}$; si $p < p_0$, on prendra $\frac{p_0-p}{q_0-q}$, afin d'avoir toujours des numérateurs et dénominateurs > 0.

Si $p_1 = p - kp_0$, $q_1 = q - kq_0$, on a dès lors

$$p_1 < p_0, \qquad q_1 < q_0 \qquad \text{et} \qquad p_0 q_1 - q_0 p_1 = \mp 1;$$

en sorte que les sommets de Θ_k sont

$$\frac{p_1}{q_1}, \quad \frac{p_0}{q_0}, \quad \frac{p_0 + p_1}{q_0 + q_1}.$$

On poursuivra les symétries, en faisant tenir à p_0, q_0 et p_1, q_1 les rôles que tenaient tout à l'heure p, q et p_0, q_0, et l'on finira par arriver à un triangle, Θ', dont un sommet sera $\frac{0}{1}$ ou $\frac{1}{0}$ (¹).

Dans le premier cas, les sommets de Θ', [toujours du type (1)] seront

$$\frac{r}{s}, \quad \frac{r'}{s'}, \quad \frac{r + r'}{s + s'} \qquad \text{avec} \qquad r' = 0, \qquad s' = 1;$$

et, par $rs' - r's = \pm 1$, on aura $r = 1$, car tous les termes sont positifs. Donc enfin, Θ' a pour sommets

$$\frac{0}{1}, \quad \frac{1}{s}, \quad \frac{1}{s+1};$$

il est donc triangle de Smith, comme on vient de l'observer et Θ, déduit de Θ' par des symétries successives, a la même propriété.

Dans le second cas, les sommets de Θ' sont

$$\frac{r}{s}, \quad \frac{r'}{s'}, \quad \frac{r + r'}{s + s'} \qquad \text{avec} \qquad r' = 1, \qquad s' = 0,$$

d'où $s = 1$; Θ' a donc les sommets

$$\frac{1}{0}, \quad r, \quad r + 1$$

et coïncide dès lors avec un des triangles de Smith de la première rangée. De là, dans tous les cas, le théorème énoncé.

Remarque. — Soient $p'' : q''$ et $p' : q'$ deux fractions irréductibles

(¹) On n'écrit pas $\frac{0}{n}$ ou $\frac{n}{0}$, parce que $p_i : q_i$ se présente toujours sous forme d'une fraction irréductible.

telles que $p'q'' - q'p'' = \pm 1$; supposons $p' > p''$ et $q' > q''$. Il y a deux triangles de Smith qui ont pour côté la demi-circonférence décrite sur le segment des points $p'' : q''$ et $p' : q'$ comme diamètre ; l'un a pour troisième sommet le point $(p' + p'') : (q' + q'')$ et est *intérieur* à la demi-circonférence précédente ; l'autre lui est *extérieur* et a pour troisième sommet le point $(p' - p'') : (q' - q'')$.

5. *Application d'une substitution modulaire.* — 1° Soit T le triangle de sommets (1), avec $pq_0 - qp_0 = \eta$ ($\eta = \pm 1$) ; la substitution *modulaire*

$$z = \frac{p\zeta + \eta p_0}{q\zeta + \eta q_0}$$

change $z = p : q$, $p_0 : q_0$, $(p + p_0) : (q + q_0)$ en $\zeta = \infty, 0, \eta$; la substitution modulaire $\zeta = \zeta' + \eta$ change $\zeta = \infty, 0, \eta$ en $\zeta' = \infty, -\eta, 0$. Donc :

On peut toujours transformer un triangle donné, T, *de Smith en* T_0, *par une substitution modulaire,* S_0.

2° Appliquons à T une substitution modulaire quelconque, S ; mettons d'abord celle-ci sous la forme $S_0(S_0^{-1}S)$, et soit

$$z = \frac{a\zeta + b}{c\zeta + d} \qquad (ad - bc = 1) \tag{2}$$

la substitution modulaire $S_0^{-1}S$.

S_0 change T en T_0 ; $S_0^{-1}S$ change T_0 en un triangle Θ, de côtés circulaires et orthogonaux à Ox, et de sommets [transformés par (2) de $\zeta = \infty, 0, 1$]

$$z = \frac{a}{c}, \frac{b}{d}, \frac{a+b}{c+d},$$

qui sont du type (1), en sorte que Θ est triangle de Smith. Donc :

Toute substitution modulaire échange entre eux les triangles de Smith, c'est-à-dire n'altère pas la division de Smith.

6. Le triangle T_0 est transformé en lui-même par les deux substitutions modulaires

$$z = \frac{1}{-\zeta + 1} \qquad \text{et} \qquad z = \frac{\zeta - 1}{\zeta},$$

qui, en effet, à $\zeta = \infty$, 0, 1 font correspondre respectivement

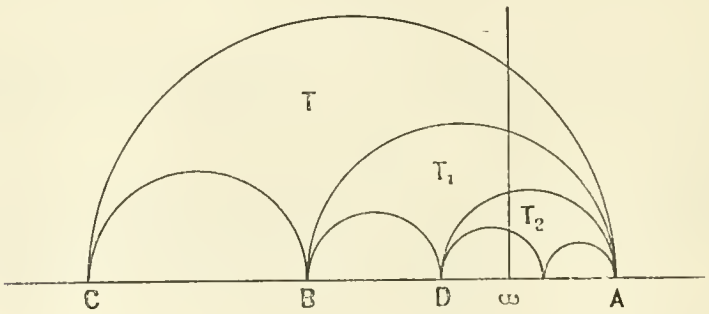
$$z = 0, 1, \infty \qquad \text{et} \qquad z = 1, \infty, 0.$$

Il en résulte aisément qu'on peut toujours trouver une et une seule substitution modulaire changeant un triangle T, de Smith, en T_0 et un sommet donné de T en un sommet donné de T_0.

Fractions continues en général.

7. *Interprétation géométrique.* — Soit ω une quantité *irrationnelle et positive;* traçons, dans le demi-plan, la demi-droite $x = \omega$ (*fig.* 3), et suivons-la de ∞ à ω : dans ce mouvement, nous traversons

Fig. 3.



des triangles de Smith successifs ; nous appellerons *pointe* (par rapport à la droite) d'un triangle traversé, T, *le* sommet de ce triangle où aboutissent les deux côtés de T que coupe la droite. Par exemple, dans la figure 3, la droite traverse les triangles T, T_1, T_2, dont les *pointes* respectives sont A, A, D.

Le *premier* triangle T', traversé par la droite, est un de ceux de la première rangée ; ses sommets sont ∞, a et $a + 1$, où *a est le plus grand entier contenu dans* ω ; et il y a ambiguïté sur la pointe : nous conviendrons de dire que *la pointe de* T' *est le sommet d'abscisse a.*

Pour les triangles suivants, il n'y aura plus aucune ambiguïté ; enfin, ω étant irrationnel, le nombre des triangles traversés sera infini, car tous les sommets ont des abscisses rationnelles et ω, dès lors, ne peut être un sommet.

Cela posé, considérons *les pointes des triangles successivement traversés* par la droite $x = \omega$, et *écrivons leurs abscisses successives;* si une pointe, d'abscisse $p : q$, se présente k fois *de suite*, au lieu d'écrire k fois de suite $p : q$, nous ne l'écrirons qu'une fois.

Enfin, en tête de cette liste des abscisses, plaçons $1 : 0$, ce qui rappellera le sommet ∞ de T′, par lequel passe la droite.

Nous obtenons ainsi de suite

$$(\mathrm{S}) \qquad \frac{1}{0},\ \frac{a}{1},\ \frac{p_2}{q_2},\ \frac{p_3}{q_3},\ \ldots,\ \frac{p''}{q''},\ \frac{p'}{q'},\ \frac{p}{q},\ \ldots$$

qui commence par $1 : 0$ et $a : 1$, comme la suite ordinaire des *réduites* de ω (déduites du développement de ω en fraction continue).

Or je dis que c'est là une loi générale, c'est-à-dire que la suite (S) *coïncide* avec celle des réduites successives de ω.

8. Il suffit de prouver que, si la proposition est vraie jusqu'au terme $p' : q'$, inclusivement, elle est vraie aussi pour le terme suivant, c'est-à-dire que $p : q$ est la réduite de ω qui suit $p' : q'$.

Observons d'abord que si la droite $x = \omega$ traverse un triangle de sommets $p_1 : q_1$, $p_2 : q_2$, $(p_1 + p_2) : (q_1 + q_2)$ et dont $p_1 = q_1$ est la *pointe*, ω est compris entre $p_1 : q_1$ et $(p_1 + p_2) : (q_1 + q_2)$; réciproquement, si cette condition est satisfaite, la droite traverse le triangle, avec la pointe $p_1 : q_1$ (les p_i, q_i sont supposés $\geqq 0$).

La droite, suivie de ∞ à ω, après avoir traversé un dernier triangle de pointe $p'' : q''$, pénètre dans un *premier* triangle, T'_1, *de pointe* $p' : q'$; le passage se fait à la traversée de la demi-circonférence γ décrite sur le segment $p'' : q''$ —— $p' : q'$ comme diamètre (*voir* figure 3, où la droite passe de T_1, triangle de pointe A, à T_2 triangle de pointe D).

Donc T'_1 est *le* triangle intérieur à γ, de sommets $p'' : q''$ et $p' : q'$; les abscisses de ses sommets sont donc (Remarque du n° 4)

$$(\mathrm{T}'_1) \qquad \frac{p''}{q''},\ \frac{p' + p''}{q' + q''},\ \frac{p'}{q'};$$

et *ces quantités sont rangées soit dans l'ordre croissant, soit dans l'ordre décroissant.* De plus, en vertu d'une observation précédente, ω est nécessairement *entre les deux dernières quantités.*

Supposons que la droite traverse h triangles, T'_1, T'_2, ..., T'_h, de pointe $p' : q'$; on voit de suite que les sommets de T'_2 sont, dans un ordre croissant ou décroissant,

$$(T'_2) \qquad \frac{p'+p''}{q'+q''}, \quad \frac{2p'+p''}{2q'+q''}, \quad \frac{p'}{q'};$$

et ceux de T'_h, toujours dans un de ces deux ordres,

$$(T'_h) \qquad \frac{(h-1)p'+p''}{(h-1)q'+q''}, \quad \frac{hp'+p''}{hq'+q''}, \quad \frac{p'}{q'}.$$

Enfin, ω est entre les deux dernières quantités écrites. Mais il n'est pas entre

$$\frac{p'}{q'} \quad \text{et} \quad \frac{(h+1)p'+p''}{(h+1)q'+q''};$$

car, autrement, la droite traverserait encore un triangle de *pointe* $p' : q'$, à savoir celui qui aurait pour sommets les quantités de la ligne (T'_h), dans lesquelles on remplacerait h par $h+1$.

De là une définition algébrique de h : *c'est le plus grand entier (positif) tel que*

$$\frac{p'}{q'} \quad \text{et} \quad \frac{hp'+p''}{hq'+q''}$$

comprennent ω; et nous avons d'ailleurs appelé h le nombre des domaines de pointe $p' : q'$, traversés par la droite $x = \omega$.

Enfin, après la traversée de T'_h, la droite pénètre, par hypothèse, dans un triangle de pointe $p : q$; il est clair que cette pointe est le sommet milieu de T'_h (c'est-à-dire celui compris entre les deux autres), donc le sommet $(hp'+p'') : (hq'+q'')$, et l'on a dès lors (puisque p et q sont > 0 et premiers entre eux)

$$(3) \qquad p = hp'+p'', \qquad q = hq'+q'',$$

h étant l'entier ci-dessus défini.

D'autre part, par hypothèse, $p'' : q''$ et $p' : q'$ sont deux réduites consécutives de ω; la suivante, $P : Q$, est donnée par

$$(4) \qquad P = kp'+p'', \qquad Q = kq'+q'',$$

où k est le *quotient incomplet* qui *suit* la réduite $p' : q'$, c'est-à-dire

que, pour calculer $p' : q'$, on s'arrête dans la fraction continue ω, au quotient incomplet k, *exclusivement*.

Mais c'est une propriété classique des réduites que ω est compris entre $P : Q$ et $(P + p') : (Q + q')$, c'est-à-dire entre

$$(5) \qquad \frac{kp' + p''}{kq' + q''} \quad \text{et} \quad \frac{(k+1)p' + p''}{(k+1)q' + q''},$$

et aussi entre $p' : q'$ et $P : Q$, c'est-à-dire entre

$$(6) \qquad \frac{p'}{q'} \quad \text{et} \quad \frac{kp' + p''}{kq' + q''}.$$

Donc, évidemment, k est *le plus grand entier positif tel que ω soit compris entre les deux quantités* (6); car la seconde des quantités (5) est plus rapprochée de $p' : q'$ que la première.

Par suite, $k = h$; et les relations (4) et (3) donnent $P = p$, $Q = q$, c'est-à-dire que $p : q$, de la suite (S), est la réduite de ω qui vient après $p' : q'$. C. Q. F. D.

De là ces conséquences :

9. Théorème fondamental. — I. *Dans la division de Stephen Smith, les abscisses des pointes distinctes des triangles que traverse successivement la droite $x = \omega$, suivie de ∞ à ω, forment une suite qui coïncide avec celle des réduites successives de ω.*

II. *Le quotient incomplet qui suit une réduite $p : q$* (c'est-à-dire celui auquel on s'arrête, exclusivement, dans la fraction continue pour obtenir la réduite) *est égal au nombre de ceux des triangles de Smith traversés par la droite, qui ont $p : q$ pour pointe* (conséquence de $k = h$).

La seconde proposition, toutefois, ne s'applique pas au premier terme, $1 : 0$, de la suite des réduites.

10. *Cas où ω est négatif.* — Les conclusions subsistent, à cause de la symétrie de la division de Smith par rapport à Oy; il faut seulement mettre le signe $-$ devant la fraction continue qui donnerait $|\omega|$, ce qui conduit à des réduites négatives, les quotients incomplets continuant à être positifs.

11. *Cas où ω est rationnel.* — La théorie précédente subsiste encore, seulement la suite des pointes s'arrête à un dernier terme, qui est ω.

Faisons maintenant quelques applications à des questions connues, pour montrer combien notre interprétation facilite les raisonnements.

Applications générales.

12. Soient ω et Ω deux irrationnelles, telles que

$$(7) \qquad \Omega = \frac{a\omega + b}{c\omega + d} \qquad (a, b, c, d \text{ entiers et } ad - bc = \pm 1);$$

on sait que les fractions continues qui représentent ω et Ω *finissent* par avoir les mêmes quotients incomplets, et dans le même ordre [1].

L'interprétation rend le théorème évident.

Soit d'abord $ad - bc = +1$, et supposons ω et Ω positifs, pour simplifier le langage. Désignons par S la substitution modulaire (7), qui change ω en Ω, et, en général, si elle change a en A, écrivons $A = aS$. Elle transforme la demi-droite $x = \omega$ en une demi-circonférence, C, orthogonale à Ox et passant par le point d'abscisse Ω sur Ox.

Si la droite, suivie de ∞ à ω, traverse successivement h_1 triangles de pointe $p_1 : q_1$; ...; h_n triangles de pointe $p_n : q_n$; ..., C, suivie dans le sens qui aboutit à Ω, traversera h_1 triangles de pointe $\frac{p_1}{q_1}S$; ...; h_n triangles de pointe $\frac{p_n}{q_n}S$; ..., *ces dernières pointes étant prises par rapport à* C [2].

D'autre part, il est *évident géométriquement* que, si l'on suit C et sa tangente au point Ω, en se dirigeant vers ce point, la tangente et C *finissent par traverser les mêmes triangles* de Smith, et *avec les mêmes pointes respectives* par rapport à C et par rapport à la tangente.

---

(1) *Voir*, par exemple, Serret, *Algèbre supérieure*, t. I, n° 16.

(2) La pointe d'un T par rapport à C se définit comme la pointe par rapport à la droite : c'est le sommet de T où aboutissent *les deux* côtés de T que coupe C.

Il résulte dès lors de ce qui vient d'être dit que la demi-droite $x = \omega$ et la demi-droite $x = \Omega$, suivies de ∞ à ω et de ∞ à Ω, finiront par traverser, la première h_ν triangles de pointe $p_\nu : q_\nu$, $h_{\nu+1}$ triangles de pointe $p_{\nu+1} : q_{\nu+1}$, etc., et la seconde h_ν triangles de pointe $\frac{p_\nu}{q_\nu}S$, etc.; ou encore les h_ν *finissent* par être les mêmes pour les deux droites, ce qui établit le théorème, puisque ce sont aussi les quotients incomplets des fractions continues donnant ω et Ω (¹).

Soit ensuite $ad - bc = -1$; il suffit de poser $\Omega = -\Omega'$, et le théorème s'applique à ω et Ω'; comme d'ailleurs les quotients incomplets sont les mêmes pour Ω et Ω' (n° **10**), le théorème est vrai pour ω et Ω. C. Q. F. D.

15. Problème. — *Une fraction irréductible donnée, $p : q$, est-elle, ou non, une réduite de ω?*

Pour qu'elle soit une réduite, il faut et suffit que $p : q$ soit la pointe d'un triangle traversé par $x = \omega$; il faut et suffit donc (n° **8**) qu'on puisse trouver p' et q', entiers positifs premiers entre eux, tels que $pq' - pq' = \pm 1$, et que ω soit compris entre $p : q$ et $(p + p') : (q + q')$.

Donnons-nous à volonté $\eta = \pm 1$, et cherchons la solution générale, en p', q', de $pq' - qp' = \eta$. Soit q'_0 est *la* solution, comprise entre o et q, de la congruence $pq'_0 \equiv \eta \pmod{q}$; on peut écrire $pq'_0 - qp'_0 = \eta$, et p'_0 est évidemment positif; alors la solution générale cherchée est

$$p' = p'_0 + \lambda p, \qquad q' = q'_0 + \lambda q,$$

λ étant un entier, qui, en vertu de $0 < q'_0 < q$, doit être *au moins zéro* pour que p' et q' soient positifs.

Écrivons maintenant que ω est entre $p : q$ et $(p + p') : (q + q')$;

(¹) La démonstration prouve que, à partir d'un certain rang, les réduites de Ω sont les transformées par S des réduites de ω, c'est-à-dire

$$\frac{P}{Q} = \frac{ap + bq}{cp + dq}.$$

cela donne l'inégalité

$$(8)\qquad \left(\omega - \frac{p}{q}\right)\left(\omega - \frac{p'_0 + \mu p}{q'_0 + \mu q}\right) < 0,$$

μ, égal à $\lambda + 1$, étant un entier *au moins égal à* 1.

D'autre part, posons

$$\omega = \frac{p}{q} - \frac{\theta\varepsilon}{q^2},$$

ε, égal à ± 1, étant du signe de $(p : q) - \omega$, en sorte que $\theta > 0$; en portant cette valeur de ω dans (8), on trouve, après suppression de facteurs *positifs*, et en utilisant $pq'_0 - qp'_0 = \eta$,

$$\frac{\theta}{q} - \frac{\varepsilon\eta}{q'_0 + \mu q} < 0.$$

Cela exige d'abord que $\varepsilon\eta$ (qui est ± 1) soit $+1$, ou $\eta = \varepsilon$; il vient donc

$$\theta(q'_0 + \mu q) < q,$$

et, pour qu'on puisse vérifier cette inégalité avec un entier μ, au moins égal à 1, *il faut et il suffit* qu'on ait

$$\theta < \frac{q}{q + q'_0}.$$

Telle est la condition nécessaire et suffisante pour que $p : q$ (fraction irréductible) *soit une réduite de* ω; θ désigne $q^2\left|\frac{p}{q} - \omega\right|$, et q'_0 la plus petite solution positive [1] de la congruence $pq'_0 \equiv \varepsilon \pmod{q}$, où ε, égal à ± 1, a le signe de $\frac{p}{q} - \omega$.

14. *Remarque.* — Si, au lieu de la pointe d'un T traversé par la droite $x = \omega$, on prenait l'abscisse du *sommet médian* de ce T (c'est-à-dire du sommet compris, sur Ox, entre les deux autres), on aurait une suite de fractions, tendant évidemment vers ω, et qui forment la

---

[1] *Voir* LEGENDRE, *Théorie des nombres*, n° 9, où la condition est donnée sous une forme équivalente.

suite de Farey, étudiée par M. Hurwitz (*Math. Ann.*, t. XLIV, p. 417).

Nombres quadratiques.

15. Nous insisterons principalement sur la réduction en fraction continue d'un nombre quadratique (positif), et nous retrouverons très simplement les propositions fondamentales de cette théorie.

Soit

$$a\omega^2 + 2b\omega + c = 0 \tag{9}$$

une équation à coefficients a, b, c, entiers et sans facteur commun, ayant une racine, ω, réelle, irrationnelle et positive.

Si ω' est la seconde racine, considérons la demi-circonférence, C, décrite sur le segment $\omega\omega'$ comme diamètre; son équation est

$$a(x^2 + y^2) + 2bx + c = 0. \tag{10}$$

Suivons C dans le sens qui aboutit au point ω (de Ox), et considérons les *triangles* T de Smith qu'elle traverse, ainsi que leurs *pointes par rapport à* C. Pour abréger le langage, nous appellerons *ordre d'une pointe* le nombre des T qui admettent cette pointe (par rapport à C) [1]. Le raisonnement fait au n° **12** montre que C et la droite $x = \omega$ (qui touche C en ω) *finissent*, quand on les suit en se dirigeant vers ω, par traverser *les mêmes* T, *avec les mêmes pointes* et *les mêmes ordres* pour ces pointes (par rapport à C et à la droite).

16. Or, je dis que, quand on considère C, *les ordres des pointes forment une suite périodique*.

Cela résulte de la théorie classique des formes quadratiques.

En effet, la forme *indéfinie* $aX^2 + 2bXY + cY^2$, ou (a, b, c), admet en elle-même une substitution (fondamentale) S, de déterminant 1, dont toutes les autres substitutions analogues sont des puissances positives ou négatives; la substitution modulaire correspondante, que nous désignerons aussi par S, change en elle-même la demi-circonférence C, qui est dite représentative de (a, b, c); nous achèverons de

[1] Il est évident géométriquement que les T de pointe donnée traversés par C le sont l'un à la suite *immédiate* de l'autre.

préciser S, c'est-à-dire nous distinguerons entre S et S^{-1}, en prenant pour S celle de ces deux substitutions qui change un point m (d'ailleurs quelconque), de C, en un point compris, *sur* C, entre ω et m.

Cela rappelé, soit T_1 un triangle de Smith traversé par C [1]; comme S change les T en T et C en elle-même, on voit que C traversera T_1S, triangle transformé de T_1 par S.

Soient alors $T_1, T_2, \ldots, T_r$ les triangles successifs, en nombre évidemment fini, que traverse C avant d'arriver à T_1S; il est clair que C traversera ensuite les triangles $T_1S, T_2S, \ldots, T_rS$; puis les $T_1S^2, \ldots, T_rS^2, \ldots$ et ainsi de suite.

Les triangles $T_1, \ldots, T_r$ donnent lieu (par rapport à C) à n pointes *distinctes*

$$\frac{p_1}{q_1}, \quad \frac{p_2}{q_2}, \quad \ldots, \quad \frac{p_n}{q_n} \qquad (n \leq r), \tag{11}$$

avec les ordres respectifs $h_1, h_2, \ldots, h_n$, et la somme $h_1 + \ldots + h_n$ est évidemment égale à r [2].

De même les $T_1S, \ldots, T_rS$ donnent les pointes *distinctes*

$$\frac{p_1}{q_1}S, \quad \ldots, \quad \frac{p_n}{q_n}S, \tag{12}$$

avec les mêmes ordres, $h_1, h_2, \ldots, h_n$: car si C traverse h_1 triangles de pointe $p_1 : q_1$, il est évident que CS, qui est C, traverse h_1 triangles de pointe $\frac{p_1}{q_1}S$.

Il en résulte immédiatement la proposition énoncée, c'est-à-dire que les ordres des pointes des triangles traversés par C forment une suite périodique; *la période est* $h_1, h_2, \ldots, h_n$, et

$$h_1 + h_2 + \ldots + h_n = r. \tag{13}$$

17. De là se déduit immédiatement le *théorème de Lagrange*. En effet : 1° les triangles traversés par C et par la droite $x = \omega$ finissent par être les mêmes, ainsi que les pointes et les ordres de

---

(1) Pour éviter toute difficulté de langage, on supposera, ce qui est toujours possible, T_1 choisi de telle sorte que sa pointe (par rapport à C) ne soit pas la même que celle du dernier triangle que C traverse *avant* T_1.

(2) Car, en vertu de la note précédente, le triangle T_1S, qui suit T_r, n'a pas la même pointe que T_r, par rapport à C.

celles-ci par rapport à ces deux lignes (n° **15**); 2° pour C, les ordres forment une suite périodique.

Donc, *pour la droite*, les ordres des pointes finissent (quand on tend vers ω sur la droite) par former une suite périodique, et, comme ces ordres des pointes sont (n^os **15** et **9**) les quotients incomplets de la fraction continue qui représente ω, on voit que :

Toute irrationnelle quadratique est développable en fraction continue périodique.

Nous reviendrons plus bas (n° **19**) sur l'équation (13), et, au n° **23**, sur les expressions (11) et (12) des pointes de la première et de la seconde période.

18. *Détermination de la période minima.* — Supposons d'abord que ω_1, développé en fraction continue, se présente sous une forme périodique simple, et mettons en évidence la période *minima :*

$$\omega = (\overline{k_1, k_2, \ldots, k_\nu}; \overline{k_1, k_2, \ldots, k_\nu}; \ldots).$$

Si $p_1 : q_1, p_2 : q_2, \ldots, p_\nu : q_\nu$ sont les ν premières réduites (en ne tenant pas compte de $1 : 0$), on a évidemment

$$\omega = \frac{p_\nu \omega + p_{\nu-1}}{q_\nu \omega + q_{\nu-1}} \tag{14}$$

et

$$p_\nu q_{\nu-1} - q_\nu p_{\nu-1} = \pm 1. \tag{15}$$

Appelons Σ la substitution $\left| z, \frac{p_\nu z + p_{\nu-1}}{q_\nu z + q_{\nu-1}} \right|$.

Distinguons maintenant deux cas :

1° $p_\nu q_{\nu-1} - q_\nu p_{\nu-1} = +1$, c'est-à-dire que Σ est *modulaire;* donc Σ *est une puissance de* S, puisque, en vertu de (14), elle change ω en ω, donc aussi ω' en ω', C en C, et la forme (a, b, c), qui a pour racines ω et ω', en elle-même. Mais évidemment S^2, considérée comme transformation de C en elle-même, conduirait à une période qui serait deux fois la période correspondant à S, en sorte que la période *minima* est celle qui correspond à S, c'est-à-dire celle trouvée au n° **16**; et l'on a $\Sigma = S^{\pm 1}$.

2° $p_\nu q_{\nu-1} - q_\nu p_{\nu-1} = -1$, et Σ n'est pas *modulaire*. En ce cas,

ω admet donc en lui-même la transformation linéaire (14), à coefficients entiers, et *de déterminant* -1, c'est-à-dire que ω *équivaut modulairement à* $-\omega$.

On sait alors, par la théorie de l'équation de Pell, que toutes les transformations telles que (14) (quand elles existent) sont les puissances *impaires* de l'une d'entre elles, Σ_0; les puissances paires de Σ_0 ont le déterminant $+1$, et $S = \Sigma_0^2$.

Or je dis, inversement, que l'existence de Σ_0 entraîne pour ω une période, qui est alors *la moitié* de la période entraînée par S, c'est-à-dire de celle du n° **16**.

Reprenons en effet la demi-circonférence C, et les triangles successifs qu'elle traverse à partir de T_1, quand on la suit vers ω :

$$(16)\qquad \left\{\begin{array}{llll} T_1, & T_2, & \ldots, & T_r; \\ T_1S, & \ldots, & \ldots, & T_rS; \\ \ldots\ldots & \ldots, & \ldots, & \ldots\ldots \end{array}\right.$$

Il est clair que, si l'on fait suivre Σ_0 d'une symétrie par rapport à l'origine, on obtient une substitution modulaire ; il en résulte que Σ_0 change la division de Smith en sa symétrique par rapport à o, ou, si l'on veut, en sa symétrique par rapport à l'axe Ox (car la division elle-même est symétrique par rapport à Oy).

Soit alors s l'opération Σ_0 suivie d'une symétrie par rapport à Ox (ce n'est pas une substitution automorphe); elle change en elle-même la division de Smith; elle change également ω en ω, par (14), donc aussi ω en ω' et la demi-circonférence C en elle-même, et l'on reconnaît aisément que, si, *sur* C, elle rapproche ou éloigne un point m de ω, il en est de même de ses puissances positives et réciproquement. Mais $s^2 = S$, évidemment, en sorte que s, appliquée à C, *rapproche* de ω, *sur* C, tout point de C.

D'autre part, en vertu de ce qui précède, le transformé T_1s de T_1 est un triangle traversé par C; on le rencontre, en suivant C vers ω à partir de T_1, *après* T_1, mais *avant* T_1s^2 ou T_1S; donc T_1s est un des T de la première ligne (16), soit T_j. Même raisonnement pour T_2; mais, puisque T_1 et T_2 sont adjacents, il en sera de même de T_1s et T_2s, c'est-à-dire que $T_2s = T_{j+1}$, etc. On en conclut nécessairement que la première ligne de (16) s'écrit

$$T_1,\quad T_2,\quad \ldots\quad T_p;\qquad T_1s,\quad \ldots,\quad T_ps,$$

car on ne peut pas continuer par $T_1 s^2$, puisque $s^2 = S$, et qu'on retomberait sur la seconde ligne. On reconnaît ensuite géométriquement, *comme au n° 16*, que la série des ordres des pointes successives [1] des triangles $T_1, T_2, \ldots, T_p$ se reproduit exactement pour $T_1 s, \ldots, T_p s$; en sorte que la période trouvée au n° **16** n'est pas ici la *période minima*, mais le *double* de celle-ci.

19. Si ω ne se présente pas sous forme périodique simple, soit z le premier de ses quotients complets possédant cette propriété; on a

$$(17) \qquad \omega = \frac{Az + A'}{Bz + B'} \qquad (A, \ldots, B' \text{ entiers et } AB' - BA' = \pm 1),$$

et, par suite, il résulte de (17) que si z admet en lui-même une transformation homographique à coefficients entiers, de déterminant $\varepsilon\,(\varepsilon = \pm 1)$, il en est de même de ω, et réciproquement. Donc, sans difficulté et d'une manière générale :

1° *Si ω n'équivaut pas modulairement à $-\omega$, la période minima dans la fraction continue qui représente ω est celle trouvée au n° **16**.*

2° *Si ω équivaut modulairement à $-\omega$, la période minima est la moitié de celle du n° **16**.*

Rappelons que la période du n° **16** est formée par les *ordres des pointes* des triangles $T_1, T_2, \ldots$ traversés successivement par C, qu'on suit de ω' vers ω, depuis le triangle initial T_1, jusqu'à son transformé par S (S est la substitution modulaire *fondamentale* qui change ω en ω).

Enfin, en appelant *arc* de C la portion découpée sur C par un T, et disant que les arcs découpés par $T_1, T_2, \ldots, T_r$, jusqu'à $T_1 S$ *exclusivement*, forment *une période d'arcs dans le champ de Smith*, nous pouvons donner à l'équation (13) l'énoncé suivant :

Le nombre, r, des arcs d'une période, dans le champ de Smith, est

---

[1] Si $\frac{p}{q}$ est la pointe de T, celle de Ts sera évidemment $\frac{p}{q}\Sigma_0$, puisque s n'est autre chose que Σ_0, suivie d'une symétrie par rapport à Ox.

égal à la somme des quotients incomplets de la période minima dans la fraction continue qui représente ω, *ou au double de cette somme, selon que* ω *n'équivaut pas ou équivaut modulairement à* $-\omega$.

Cette proposition sera fondamentale dans un problème traité ci-après (n° **24**).

20. *Remarque.* — En admettant toujours que ω vérifie l'équation

$$(9) \qquad a\omega^2 + 2b\omega + c = 0 \qquad (a,\ b,\ c \text{ premiers entre eux}),$$

en posant $D = b^2 - ac$, et désignant par σ le plus grand commun diviseur de a, $2b$, c, on sait que la condition nécessaire et suffisante pour que ω équivale modulairement à $-\omega$ est que l'équation $\tau^2 - D\theta^2 = -\sigma^2$ soit soluble en nombres entiers τ et θ.

21. L'interprétation géométrique montre immédiatement que, si T est le *premier triangle* de Smith traversé à la fois par la demi-circonférence C et par la demi-droite, $x=\omega$, *avec la même pointe* $p:q$ pour les deux lignes, la *période*, dans la fraction continue ω, commence soit avec le quotient incomplet qui suit la réduite $p:q$, soit avec le quotient incomplet suivant.

Une étude plus précise conduit aisément à ces propositions :

1° *Pour que la fraction continue qui représente* ω *ne renferme qu'un terme non périodique* (lequel est alors l'entier maximum, a, contenu dans ω), il faut et il suffit que C *pénètre* dans le triangle qui a pour sommets ∞, a, $a+1$, *avec la pointe* a, et ait traversé un triangle au moins de pointe ∞ (ces pointes étant prises par rapport à C). Sous une autre forme, *il faut et il suffit* que ω' [seconde racine de (9)] soit inférieure à $a-1$, ou encore *qu'il y ait au moins deux entiers entre* ω' *et* ω.

Toutefois, si, entre ω' et ω, il y a exactement $a+1$ entiers, $a+1$ étant au moins égal à *deux*, c'est-à-dire a étant $\geqq 1$, *la fraction sera périodique simple*, et réciproquement.

Cela revient à dire que ω est > 1 et que ω' est compris entre -1 et 0, résultat bien connu.

2° Dans tous les autres cas, c'est-à-dire quand il y a moins de deux entiers entre ω' et ω, si T est le premier triangle traversé à la fois par C et la droite avec la même pointe, $p:q$, et si h est le quotient incomplet qui suit la réduite $p:q$, la période commence *avec* le quotient incomplet qui vient après h.

22. *Seconde racine.* — Si la seconde racine, ω', de (9) est positive, on aura son développement en suivant C en sens inverse, c'est-à-dire de ω vers ω'. On traverse alors les mêmes triangles de Smith, mais dans l'ordre inverse; la série des ordres de leurs pointes est donc la même que pour ω, *mais inversée*, c'est-à-dire que la période des quotients incomplets de ω' est la période analogue de ω, *retournée*. L'interprétation géométrique a rendu ainsi évidente cette proposition classique de Galois.

23. *Réduites homologues.* — Nous appellerons ainsi les réduites qui précèdent un même quotient incomplet de la période *minima*, dans les périodes successives à partir de la première.

Supposons d'abord ω non équivalent modulairement à $-\omega$; il résulte de la comparaison des lignes (11) et (12) que, si $p:q$ est une réduite précédant un quotient incomplet de la première période, ses homologues successives sont $\frac{p}{q}S$, $\frac{p}{q}S^2$, ..., c'est-à-dire se déduisent de $p:q$ par la substitution modulaire S.

On précise S comme il suit (afin de la distinguer de S^{-1}). Soit t_0, u_0, la plus petite solution positive de l'équation de Pell,

$$t^2 - Du^2 = \sigma^2 \qquad \text{(notations du n° 20)};$$

ω est de la forme

$$\omega = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{a};$$

nous poserons $t' = t_0$ si ω correspond au signe $+$ devant $\sqrt{D}$, et $t' = -t_0$ s'il correspond au signe $-$. Alors S sera la substitution qui change z en $(\lambda z + \mu):(\nu z + \rho)$, étant posé

$$\lambda = \frac{t' - bu_0}{\sigma}, \qquad \mu = -\frac{cu_0}{\sigma}, \qquad \nu = \frac{au_0}{\sigma}, \qquad \rho = \frac{t' + bu_0}{\sigma}.$$

Si ω équivaut modulairement à $-\omega$, on a un résultat analogue

(n° **18** et note de ce numéro) en remplaçant S par Σ_0, et la substitution (de déterminant -1) Σ_0 se définit ainsi :

Soit t_0, u_0 la plus petite solution positive de

$$t^2 - Du^2 = -\sigma^2;$$

on posera $t' = t_0$ ou $t' = -t_0$ selon que ω correspond au signe $+$ ou au signe $-$ devant $\sqrt{D}$, comme ci-dessus; Σ_0 sera la substitution changeant z en $(\lambda z + \mu) : (\nu z + \rho)$, où

$$\lambda = \frac{t' - bu_0}{\sigma}, \qquad \mu = -\frac{cu_0}{\sigma}, \qquad \nu = \frac{au_0}{\sigma}, \qquad \rho = \frac{t' + bu_0}{\sigma}.$$

Dès lors, λ, μ, ν, ρ étant ainsi définis dans l'un et l'autre cas, la première réduite, $P:Q$, homologue de $p:q$, sera $(\lambda p + \mu q):(\nu p + \rho q)$, ...

Là encore, la Géométrie donne de suite un résultat connu [1].

Nous n'insisterons pas davantage sur les applications de notre interprétation géométrique; nous avons eu surtout en vue de montrer combien elle simplifie certaines théories et de préparer ce qui suit.

DEUXIÈME PARTIE.

Réduites de Stephen Smith.

24. Rappelons quelques définitions classiques.

Étant donnée l'équation *à racines réelles et irrationnelles*

$$a\omega^2 + 2b\omega + c = 0,$$

---

[1] *Voir*, par exemple, Serret, *Algèbre supérieure*. t. I, n^{os} **27** et suivants. Il est évident aussi, géométriquement, que si l'on considère les fractions

$$\frac{p}{q}, \qquad \frac{p}{q}S^{-1}, \qquad \frac{p}{q}S^{-2}, \qquad \ldots,$$

ce sont les pointes de triangles traversés par C, *suivie de* ω *vers* ω'; cette suite de fractions a donc pour limite ω', et, à partir d'un certain rang, est une suite de réduites homologues pour ω' (*Ibid.*, n^{os} **29-31**).

où a, b et c sont premiers entre eux, nous appellerons *première et seconde racine* respectivement les quantités

$$\omega' = \frac{-b-\sqrt{b^2-ac}}{a}, \quad \omega = \frac{-b+\sqrt{b^2-ac}}{a} \quad (b^2-ac \text{ positif et non carré}),$$

et nous attacherons à la demi-circonférence

$$a(x^2+y^2)+2bx+c=0,$$

représentative de la forme indéfinie (a, b, c), *le sens de la première à la seconde racine*. Il s'ensuit qu'à une forme indéfinie primitive répond une demi-circonférence de sens déterminé et unique, et, réciproquement, à une demi-circonférence donnée avec son sens, répond une et une seule forme indéfinie primitive (c'est-à-dire telle que a, b et c soient premiers entre eux).

Les deux formes (a, b, c) et $(-a, -b, -c)$ ont la même demi-circonférence représentative, mais avec des *sens différents*.

Cela posé, appelons *réduites de Smith* (bien qu'elles n'aient pas été introduites par cet auteur, mais parce qu'elles se rattachent à sa division du demi-plan) les formes quadratiques binaires indéfinies *dont la circonférence représentative coupe les deux côtés rectilignes du triangle initial*, T_0, c'est-à-dire les droites $x=0$ et $x=1$.

Il est aisé, en répétant un raisonnement classique de Smith, de trouver les réduites équivalentes à une forme donnée, φ.

Soit en effet C la demi-circonférence représentative de φ, *suivie de* ω' *à* ω; soit α_1 l'arc, de sens ainsi connu, qu'intercepte sur C un triangle, T_1, de la division de Smith; appelons *arc réduit* l'arc intercepté par T_0 sur une demi-circonférence orthogonale à Ox : il est clair que α_1 équivaut modulairement à un arc réduit, α'_1, et à un seul, qu'on obtient en faisant subir à α_1 *la* substitution modulaire qui change T_1 en T_0, et la pointe de T_1 (par rapport à C) en le sommet ∞ de T_0 (n° **6**). Dès lors, le sens de α'_1 est défini par celui de α_1, et la forme (a'_1, b'_1, c'_1), représentée par la demi-circonférence qui porte l'arc α'_1, et dont le sens est celui de cet arc, est proprement équivalente à φ.

De plus, pour obtenir ainsi *toutes* les réduites analogues, il suffit de considérer sur C *les arcs d'une période* (n° **19**), $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$, dans

le champ de Smith, car les suivants leur sont modulairement équivalents par S, S^2, ... (et les précédents par S^{-1}, S^{-2}, ...), et donneraient lieu, dès lors, aux mêmes arcs réduits, sens compris.

Le nombre des réduites de Smith proprement équivalentes à φ est ainsi celui des arcs d'une période sur C, dont nous avons donné l'expression au n° **19**; donc :

Théorème. — *Le nombre des réduites de Stephen Smith équivalentes à une forme binaire indéfinie* (a, b, c) *est la somme des quotients incomplets de la période minima, dans la fraction continue ordinaire qui représente une quelconque,* ω, *des racines de la forme,* ou *deux fois cette somme, selon que* ω *n'équivaut pas ou équivaut modulairement à* $-\omega$.

C'est-à-dire : selon que l'équation $\tau^2 - D\theta^2 = -\sigma^2$ (n° **20**) n'est pas ou est soluble en entiers τ et θ.

25. *Remarque.* — Il est à peu près évident que si ω équivaut modulairement à $-\omega$, la forme (a, b, c) équivaut à la forme $(-a, b, -c)$. Car l'hypothèse entraîne que (a, b, c) se transforme, par une substitution *de déterminant* -1, en elle-même ou en elle-même changée de signe : mais une telle substitution, comme on sait, change la première racine de la forme en la seconde et inversement; donc, ici, elle changera (a, b, c) en $(-a, -b, -c)$. Si on la fait suivre de la substitution $|X, Y; -X, Y|$, on aura, au total, une substitution de déterminant $+1$, qui changera (a, b, c) en $(-a, b, -c)$.

Réciproquement, si les formes (a, b, c) et $(-a, b, -c)$ sont équivalentes, ω, seconde racine de la première, sera modulairement équivalente à la seconde racine de la deuxième, laquelle est évidemment $-\omega$.

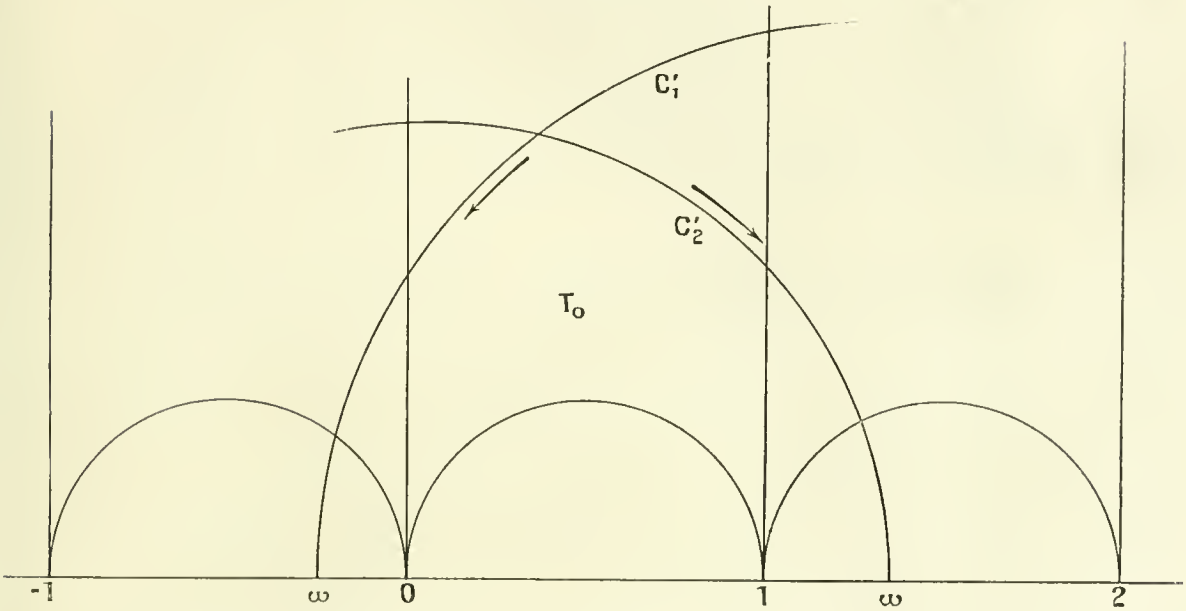
26. *Réduites principales de Smith.* — Nous appellerons ainsi les réduites de Smith dont la demi-circonférence, C', suivie avec son sens, coupe *le* côté curviligne du triangle (nécessairement de sommet ∞) dans lequel elle pénètre au sortir de T_0.

En d'autres termes (*figure* 4, où l'on a marqué C' dans deux positions différentes), pour une réduite principale, en suivant C' dans le

sens voulu, on passe de T_0, où la pointe (par rapport à C′) est $+\infty$, à un triangle où la pointe est soit 1, soit 0; cela revient à dire que *la pointe change* quand on passe de T_0 au triangle suivant.

Cherchons maintenant les réduites principales équivalentes à la forme (a, b, c), dont la demi-circonférence est C : pour que l'arc

Fig. 4.



réduit α'_1, qu'on déduit d'un *arc* α_1, découpé sur C par un triangle T_1 (n° **24**), corresponde à une réduite principale, il faut et il suffit, évidemment, d'après ce qui précède, que le triangle T_2, qui découpe sur C l'arc *suivant*, α_2, *n'ait pas la même pointe* que T_1 par rapport à C.

En d'autres termes, aux réduites principales correspondent les changements de pointe dans les triangles successifs traversés par C pendant une période d'arcs, et inversement; c'est-à-dire que :

Le nombre des réduites principales équivalentes à (a, b, c) *est celui des pointes* DISTINCTES *des triangles de Smith traversés par* C *dans l'intervalle d'une période d'arcs.*

C'est donc le nombre que nous avons appelé n au n° **16**; ou encore celui des $h_1, h_2, \ldots, h_n$, qui sont les quotients incomplets de la

période qui, dans la fraction continue ω, répond à une période d'arcs. Par suite, enfin :

THÉORÈME. — *Le nombre des réduites principales de Smith équivalentes à* (a, b, c) *est égal au nombre des termes de la période minima dans la fraction continue qui représente une racine,* ω, *de la forme, ou à deux fois ce nombre, selon que* (a, b, c) *n'équivaut pas ou équivaut à* $(-a, b, -c)$.

On reconnaît là la belle proposition qu'a donnée Dirichlet [1] pour le *nombre des réduites de Gauss;* nous allons la retrouver en montrant que les réduites principales de Smith correspondent, chacune à chacune, à celles de Gauss.

27. Celles-ci, en effet, par définition, sont les formes (a, b, c) pour lesquelles, *les racines étant de signes contraires, la première en valeur absolue est* > 1, *et la seconde* < 1.

Or la réduite de Smith, qui correspond à l'arc C'_1 de la figure 4, est bien une réduite de Gauss, car la première racine, ω', est supérieure à 1, et la seconde, ω, comprise entre -1 et 0.

Pour l'arc C'_2 de la même figure, ce ne serait plus vrai, car ω' est < 0 et ω entre 1 et 2; mais il suffit de déplacer parallèlement à Ox, de -1, vers la gauche, l'arc C'_2, ce qui revient à remplacer la forme correspondante par une forme équivalente. Alors, pour cette nouvelle forme, ω' est négatif, et, en valeur absolue, > 1; ω est entre 0 et 1.

De même à une réduite de Gauss correspond une, et une seule, réduite principale de Smith.

Le théorème final du n° **26** est donc identique à celui de Dirichlet; la démonstration que nous en donnons paraît plus rapide et, surtout, plus intuitive.

Réduites de M. Hurwitz [2].

28. Ce sont les formes (a', b', c') pour lesquelles $a' > 0$ et $c' < 0$; le nombre de celles qui équivalent à la forme donnée (a, b, c) de

---

[1] *Zahlentheorie*, § 83.

[2] HURWITZ, *Math. Annalen*, t. XLV, p. 99 et suiv.

déterminant D, est fini, en vertu même de $D = b'^2 - a'c'$. Je dis que leur nombre est égal à celui des réduites de Smith équivalentes à (a, b, c).

Désignons en effet, d'une manière générale, par ψ les formes indéfinies (α, β, γ) pour lesquelles $\alpha\gamma$ est *négatif;* si $\alpha > 0$ et $\gamma < 0$, ψ est une réduite de M. Hurwitz; si $\alpha < 0$ et $\gamma > 0$, la substitution $|X, Y; -Y, X|$ change ψ en une telle réduite : on en conclut immédiatement que le nombre des ψ équivalentes à la forme (a, b, c) est *double* de celui des réduites de Hurwitz équivalentes à la même forme.

D'autre part, les racines d'une ψ sont de signes contraires, par définition même des ψ; il en résulte que la demi-circonférence, C, d'une ψ, coupe Oy et pénètre dans T_0.

Si C coupe le second côté rectiligne $(x = 1)$ de T_0, la ψ est une réduite de Smith; sinon C coupe nécessairement, avec Oy, le côté curviligne de T_0, c'est-à-dire que l'origine O est, par rapport à C, la *pointe* de T_0. Nous pouvons alors transformer T_0 en lui-même (n° 6) par une substitution modulaire, Σ, qui change le sommet O en le sommet ∞, et C devient, par Σ, une demi-circonférence C', coupant les deux côtés rectilignes de T_0; la substitution à deux variables correspondantes, Σ', change donc la ψ en une réduite de Smith.

En d'autres termes, à chaque ψ, nous faisons ainsi correspondre *une* réduite de Smith équivalente; réciproquement, à une réduite de Smith équivalent *deux* ψ, à savoir cette réduite elle-même et sa transformée par la substitution inverse de Σ'.

Donc, parmi les formes équivalentes à (a, b, c), le nombre des ψ est *double* de celui des réduites de Smith, et, dès lors, ce dernier nombre est aussi celui des réduites de M. Hurwitz.

Par suite :

Le nombre des réduites de M. Hurwitz équivalentes à une forme (a, b, c) est donné par le théorème final du n° 24.

29. *Exemples.* — Nous les emprunterons au Mémoire même de M. Hurwitz cité plus haut :

1° Soit la forme

$$62X^2 - 2 \times 95XY + 145Y^2, \qquad D = 35, \qquad \sigma = 1.$$

M. Hurwitz trouve *sept* réduites, dont $5X^2 - 7Y^2$, que nous pouvons prendre pour (a, b, c). Alors $\omega = \frac{\sqrt{35}}{5}$, et, en fraction continue, on a

$$\frac{\sqrt{35}}{5} = (1, \overline{5, 2}, \overline{5, 2}, \ldots).$$

La période minima est 5, 2; d'autre part ω n'équivaut pas à $-\omega$ parce que $\tau^2 - 35\theta^2 = -1$ est insoluble (-1 n'étant pas résidu quadratique de 7), en sorte que, par le n° **24**, le nombre des réduites doit être $5 + 2$, ou 7, comme l'a trouvé M. Hurwitz.

2° Soit la forme

$$7X^2 - 8XY - 3Y^2, \qquad D = 37, \qquad \sigma = 1.$$

Ici $\tau^2 - 37\theta^2 = -1$ est soluble, car D est premier et $\equiv 1 \pmod 4$; on a d'ailleurs la solution $\tau = 6$, $\theta = 1$.

Une racine de la forme est $\frac{4 + \sqrt{37}}{7}$, qui donne la fraction continue

$$\frac{4 + \sqrt{37}}{7} = (\overline{1, 2, 3}, \overline{1, 2, 3}, \ldots),$$

d'où la période minima 1, 2, 3. La somme $1 + 2 + 3$, ou 6, doit être *doublée* (n° **24**) pour donner le nombre des réduites; celles-ci sont donc en nombre *douze*, comme M. Hurwitz l'obtient par calcul direct.

TROISIÈME PARTIE.

Réduites d'Hermite.

30. On nomme ainsi [1] les formes indéfinies, (α, β, γ), dont la demi-circonférence pénètre dans le domaine fondamental classique, D_0, *du groupe modulaire*.

---

[1] *Voir*, par exemple, Klein et Fricke, *Fonctions modulaires*, t. I, p. 258.

La *division modulaire* du demi-plan va donc jouer maintenant le rôle que jouait jusqu'ici la division de Stephen Smith.

Soit (a, b, c) une forme indéfinie ; appelons *arc* sur sa demi-circonférence, C, tout arc intercepté sur C par un domaine modulaire (c'est-à-dire par un domaine de la division modulaire); il est clair, en vertu d'un raisonnement connu (n° **24**), que le nombre des réduites d'Hermite équivalentes à (a, b, c) est celui des *arcs d'une période* sur C. On appellera ainsi les arcs *successifs* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\rho$, découpés sur C par des domaines modulaires $D_1, D_2, \ldots, D_\rho$, dont le premier est arbitraire; quant à l'arc suivant, $\alpha_{\rho+1}$, il serait découpé par le domaine D_1S, en désignant toujours par S la substitution fondamentale de la forme (a, b, c) en elle-même, précisée comme au n° **16**.

Le nombre cherché des réduites d'Hermite est donc ρ, et c'est cet entier ρ que nous nous proposons de déterminer directement.

31. Un domaine modulaire a *un* sommet d'angle nul, que, dans le Mémoire précédent (¹), nous avons appelé sa *pointe*, et qui est situé sur Ox (sauf pour les domaines de la rangée supérieure, où la pointe est à l'infini dans la direction de Oy). Les ρ domaines $D_1, \ldots, D_\rho$, traversés par C, dans une période d'arcs, ont des pointes *distinctes* en nombre ν, au plus égal à ρ; appelons encore *ordre d'une pointe* le nombre des domaines *traversés par* C qui admettent cette pointe, et soient $k_1, k_2, \ldots, k_\nu$ les ordres respectifs des ν pointes; on aura évidemment (²), comme au n° **16**,

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_\nu = \rho. \tag{18}$$

Si l'on prenait, sur C, *la période suivante* d'arcs, c'est-à-dire ceux découpés par les domaines $D_1S, D_2S, \ldots, D_\rho S$, ceux-ci auraient pour pointes *distinctes* les transformées par S des pointes distinctes précédentes, et les ordres seraient toujours respectivement $k_1, k_2, \ldots, k_\nu$, parce que, si C traverse k domaines de pointe $\frac{p}{q}$, CS, qui est C, traverse aussi k domaines de pointe $\frac{p}{q}S$.

(¹) Dans ce qui suit, nous désignerons ce Mémoire par I.

(²) On supposera, ce qui est toujours possible, D_1 choisi de telle sorte que sa pointe ne coïncide pas avec celle du dernier domaine modulaire que C traverse *avant* D_1.

On peut donc dire que *les ordres des pointes* distinctes des domaines traversés successivement par C forment *une suite périodique;* la période, $k_1, k_2, \ldots, k_\nu$, *correspond à la période d'arcs.*

Nous allons maintenant lier les $k_1, \ldots, k_\nu$ au développement hermitien de ω.

32. Soit toujours ω (n° **24**) la seconde racine [1] de (a, b, c); cherchons son développement hermitien (I, n° **22**). Il faut pour cela suivre la demi-droite $x = \omega$ de ∞ à ω, et prendre les ordres, $1 + \theta_i$, des pointes *distinctes* des domaines successivement traversés par elle : le premier, θ_0, des *entiers positifs* θ_i correspond à la pointe ∞ du premier domaine et est pris égal à l'entier le plus voisin de ω. On a alors, en désignant par ε_i une unité ± 1 qu'on sait définir, et qui correspond à θ_i, le développement

$$\omega = \theta_0 + \cfrac{\varepsilon_1}{\theta_1 + \cfrac{\varepsilon_2}{\theta_2 + \ddots}} \tag{19}$$

Si l'on s'arrête, dans la fraction second membre, au terme θ_{i-1}, inclus, on obtient une *fraction d'Hermite*, $p_i : q_i$, et $1 + \theta_i$ est le nombre des domaines modulaires de pointe $p_i : q_i$ traversés par la demi-droite $x = \omega$ (I, n° **26**). On obtient ainsi, dans leur ordre, les pointes distinctes des domaines traversés *successivement* par la droite.

Or je dis que, si l'on suit la demi-circonférence C et la demi-droite $x = \omega$ *en se dirigeant vers le point* ω, les deux lignes *finissent* par traverser exactement les mêmes domaines modulaires : la proposition était évidente dans la division de Smith, parce que les triangles de Smith avaient leurs trois sommets sur Ox; elle ne l'est pas dans la division modulaire, dont les domaines ont *un* sommet sur Ox et *deux* au-dessus.

Appelons, comme dans le Mémoire I, *sommets* d'un domaine

---

[1] Il n'est pas nécessaire de supposer $\omega > 0$; car, si $\omega < 0$, on n'aura qu'à faire précéder le développement hermitien de $-\omega$ du signe $-$, ce qui ne change pas les quotients incomplets.

modulaire les deux sommets autres que la pointe; *base*, le côté qui joint les *sommets; côtés*, les deux côtés qui aboutissent à la pointe : *nous supposerons d'abord qu'il n'y a, sur* C, *aucun sommet de domaine modulaire* (¹).

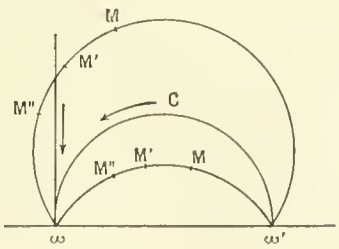
35. Soient toujours $D_1, D_2, \ldots, D_\rho$ les domaines successivement traversés par C dans une période d'arcs; leur nombre, ρ, est évidemment fini. Je dis d'abord que je puis trouver un entier positif, m, tel que les domaines $D_1 S^m, D_2 S^m, \ldots, D_\rho S^m$, transformés des précédents par S^m, et qui correspondent aussi à une période d'arcs, n'aient aucun *sommet* entre la demi-circonférence C et la demi-droite $x = \omega$ (qui touche C au point ω); et je dis aussi que la même propriété appartiendra à *tous* les domaines traversés suivants :

$$D_1 S^{m+1}, \quad D_2 S^{m+1}, \quad \ldots, \quad D_1 S^{m+2}, \quad \ldots$$

Observons en effet que, si nous appliquons à un point M du demi-plan les substitutions modulaires $S, S^2, \ldots$, les points $M, M' = MS, M'' = MS^2, \ldots$ sont sur un arc de circonférence qui passe par M et par les *points doubles*, ω et ω' de S, lesquels sont les points où C coupe Ox'. De plus, les points, $M, M', M'', \ldots$, *sur leur arc*, sont de plus en plus proches de ω. Tout cela résulte des propriétés classiques des substitutions fuchsiennes *hyperboliques*, et S est une telle substitution.

Donc, si M est intérieur à C, les points $M, M', M'', \ldots$ se rapprochent

Fig. 5.



de ω sur un arc qui reste *intérieur* à C; si M est extérieur à C, ces points se rapprochent de ω sur un arc *extérieur* à C (*fig.* 5), et qui,

(¹) Il n'y en a aucun sur la droite $x = \omega$ (I, n° **3**, *Rem.*), puisque ω est supposé essentiellement irrationnel (n° **24**).

dans sa partie voisine du point ω, *n'est pas du même côté de la demi-droite* $x = \omega$ *que* C. De là résulte aisément la proposition énoncée au commencement du présent numéro.

Raisonnons en effet, pour simplifier, dans le cas que représente la figure 5, c'est-à-dire $\omega < \omega'$ (le raisonnement serait analogue si $\omega > \omega'$); et appliquons S, S^2, ..., aux domaines D_1, D_2, ..., D_ρ. En vertu de ce qui précède, on pourra trouver m assez grand pour que les ρ domaines $D_1 S^m$, ..., $D_\rho S^m$ aient leurs 2ρ sommets, les uns *au voisinage de* ω, *à l'intérieur* de C, les autres, *également au voisinage de* ω, mais *à gauche* de la droite $x = \omega$; et les sommets de $D_i S^{m+1}$, $D_i S^{m+2}$, ... seront placés comme ceux de $D_i S^m$, mais plus près de ω.

C. Q. F. D.

Les $D_i S^m$ (qui sont tous traversés par C) ne peuvent se partager qu'en trois catégories :

1° Ceux qui ont leurs deux sommets à l'intérieur de C : si l'on se rappelle que les domaines modulaires deviennent infiniment petits, dans tous les sens, à mesure qu'ils se rapprochent de l'axe Ox, il est clair que les domaines 1° ne peuvent être traversés par C que si leurs pointes respectives sont extérieures à C et *à gauche* de ω; alors la droite $x = \omega$, suivie de ∞ à ω, traverse chacun d'eux, et *de la même manière que* C, suivie de ω' à ω, c'est-à-dire que C et la droite y *pénètrent* par un même *côté* et en *sortent* par l'autre.

2° Ceux qui ont leurs deux sommets à l'extérieur de C, *donc à gauche de la droite* $x = \omega$. Pour que C les traverse, il faut et il suffit que leurs pointes respectives soient intérieures à C, et alors la droite $x = \omega$ les traverse aussi, et de la même manière que C, entrant, avec C, par un côté et sortant par l'autre.

3° Ceux qui ont un sommet à l'intérieur de C, l'autre à l'extérieur, et à gauche de $x = \omega$. Alors C et la droite les traversent nécessairement entrant tous deux par un même côté et sortant par la base, ou inversement.

Il résulte de là que la droite $x = \omega$ *finit* par traverser tous les domaines que traverse C, et *de la même manière*, c'est-à-dire qu'au sortir d'un domaine traversé par C, la droite pénètre dans le domaine *suivant* que traverse C. Sous une autre forme, *la droite finit par*

traverser les mêmes domaines que C; c'est le théorème énoncé au n° **32**, et qu'il s'agissait d'établir.

34. *Périodicité du développement hermitien.* — De là se déduisent de nombreuses conséquences.

A partir du moment où C et la droite traversent les mêmes domaines, soient $D_1, D_2, \ldots, D_\rho$ ceux successifs traversés par C pendant une période d'arcs; désignons leurs pointes distinctes par $p_1 : q_1, p_2 : q_2, \ldots, p_\nu : q_\nu$, par $k_1, \ldots, k_\nu$ leurs ordres (n° **31**); pour la période suivante, on aura les domaines $D_1 S, \ldots, D_\rho S$; les pointes $\frac{p_1}{q_1} S, \ldots, \frac{p_\nu}{q_\nu} S$; et les ordres $k_1, \ldots, k_\nu$; etc. Pour la droite, domaines, pointes distinctes et ordres seront les mêmes; c'est-à-dire que si C traverse k_i domaines de pointe $p_i : q_i$, il en sera de même de la droite, qui traversera également k_i domaines de pointe $\frac{p_i}{q_i} S$, etc.

D'autre part, reprenons le développement hermitien (19),

$$(19) \qquad \omega = \theta_0 + \cfrac{\varepsilon_1}{\theta_1 + \cfrac{\varepsilon_2}{\theta_2 + \ddots}} \qquad (\varepsilon_i = \pm 1),$$

les pointes des domaines traversés par la droite sont *les fractions d'Hermite successives* θ_0, $\theta_0 + \frac{\varepsilon_1}{\theta_1}$, etc., et le nombre des domaines traversés, de pointe $p_i : q_i$, est $1 + \theta_i$, en désignant par θ_i le quotient incomplet qui *suit* la fraction $p_i : q_i$ (n° **32**).

Il résulte de ce qui précède que *les* $1 + \theta_i$ *forment une suite périodique, dont la période est* $k_1, k_2, \ldots, k_\nu$; donc aussi que *les* θ_i *forment une suite périodique.*

Il en est de même des unités ε_i, dans (19); en effet, nous savons (I, n° **23**, *Nota*) que ε_i est $+1$ si ω est entre $p_{i-1} : q_{i-1}$ et $p_i : q_i$, et -1 dans le cas contraire. Dans la période suivante, $\frac{p_i}{q_i}$ est devenu $\frac{p_i}{q_i} S$, et, si ω est (ou non) entre $\frac{p_{i-1}}{q_{i-1}}$ et $\frac{p_i}{q_i}$, ωS, qui est ω, est (ou non) entre $\frac{p_{i-1}}{q_{i-1}} S$ et $\frac{p_i}{q_i} S$; donc *il y a, pour les* ε_i, *une période qui correspond à celle des* θ_i.

De plus $p_i : q_i$ étant toujours la fraction qu'on déduit de (19) quand on s'arrête, dans le second membre, à $\varepsilon_i : \theta_i$, *exclus*, la fraction *homologue* suivante, c'est-à-dire celle qui précède le terme $\varepsilon_i : \theta_i$ de la période suivante, est $\frac{p_i}{q_i}S$.

Enfin, le nombre ρ des arcs d'une période, c'est-à-dire (18) la somme $k_1 + k_2 + \ldots + k_\nu$, est égal à la somme

$$(1+\theta_1)+(1+\theta_2)+\ldots+(1+\theta_\nu),$$

étendue aux quotients incomplets, θ_i, *d'une période*, dans le développement hermitien de ω.

35. Nous allons transformer cette dernière somme, en introduisant la *fraction continue* qui représente ω.

Nous savons (I, n° **15**) que toute fraction d'Hermite est une réduite de ω; désignons par $p_1 : q_1$ une telle fraction *appartenant à la partie périodique des deux développements*.

Les fractions d'Hermite suivantes, pour ω, pourront s'écrire

$$(\mathrm{I})\qquad \left\{\begin{array}{llll} \frac{p_1}{q_1}, & \frac{p_2}{q_2} & \ldots, & \frac{p_\nu}{q_\nu}; \\ \frac{p_1}{q_1}S, & \frac{p_2}{q_2}S, & \ldots, & \frac{p_\nu}{q_\nu}S; \\ \frac{p_1}{q_1}S^2, & \frac{p_2}{q_2}S^2, & \ldots, & \frac{p_\nu}{q_\nu}S^2; \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots \end{array}\right.$$

De même les réduites suivantes de ω s'écriront

$$(\mathrm{II})\qquad \left\{\begin{array}{llll} \frac{p_1}{q_1}, & \frac{p'_2}{q'_2}, & \ldots, & \frac{p'_n}{q'_n}; \\ \frac{p_1}{q_1}S, & \frac{p'_2}{q'_2}S, & \ldots, & \frac{p'_n}{q'_n}S; \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \end{array}\right.$$

S désignant, dans les deux tableaux, la même substitution, définie précédemment et n étant $\geqq \nu$, puisque toute réduite n'est pas nécessairement une fraction d'Hermite.

Il résulte de là que, si $p'_i : q'_i$ figure au Tableau I (et c'est nécessai-

rement dans la première ligne)[1], les $\frac{p'_i}{q'_i}S^m (m > 0)$ y figureront également; de plus si $p'_i : q'_i$ ne figure pas à ce tableau, *aucun* des $\frac{p'_i}{q'_i}S^m$ n'y figurera : ce dernier point résulte de ce que les lignes du Tableau I renferment le même nombre de termes que la première.

On peut donc dire que, pour savoir quelles réduites sont des fractions d'Hermite, il suffira de se borner aux réduites d'une même période, répondant à une période d'arcs, c'est-à-dire aux réduites qui vont de l'une d'elles, $\frac{p_1}{q_1}$, à sa transformée, $\frac{p_1}{q_1}S$, par S.

D'autre part, reprenons le procédé (I, n° **22**) par lequel on déduit de la fraction continue le développement hermitien.

Les réduites qui n'appartiennent pas à la suite d'Hermite précèdent nécessairement (I, n° **22**) le quotient incomplet 1; soit h_m un quotient 1, tel que la réduite précédente ne soit pas fraction d'Hermite : pour obtenir le développement hermitien, on remplace, dans la fraction continue, la portion

$$(20)\quad h_{m-1} + \cfrac{1}{h_m + \cfrac{1}{h_{m+1} + \cfrac{1}{h_{m+2}}}} \qquad \text{par} \qquad (1 + h_{m-1}) + \cfrac{-1}{(1 + h_{m+1}) + \cfrac{1}{h_{m+2}}},$$

et ainsi de suite pour tous les h_m analogues, en commençant par celui du plus petit indice m.

L'opération partielle (20) substitue aux *trois* quotients incomplets h_{m-1}, h_m, h_{m+1}, de la fraction continue, *deux* quotients

$$\theta = 1 + h_{m-1} \qquad \text{et} \qquad \theta' = 1 + h_{m+1}$$

du développement; or la somme

$$(1 + h_{m-1}) + (1 + h_m) + (1 + h_{m+1}),$$

qui porte sur les *trois* quotients modifiés dans la fraction continue, est égale à la somme analogue, $(1 + \theta) + (1 + \theta')$, étendue aux *deux*

---

[1] Il faut ne pas oublier que les dénominateurs vont en croissant, aussi bien dans la suite d'Hermite que dans celle des réduites; il s'ensuit que $p'_i : q'_i$ ne peut figurer au premier Tableau que dans la première ligne.

quotients substitués : car ces deux sommes ont pour valeur commune $h_{m-1} + h_{m+1} + 4$, à cause de $h_m = 1$.

Dès lors, si l'on effectue le changement (20), sur *la fraction continue*, dans l'étendue d'une période [1], on substitue aux quotients incomplets $h_1, h_2, \ldots, h_n$ de cette période les $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_\nu$ d'une période correspondante du développement hermitien, et l'on a

$$(21) \qquad (1 + h_1) + (1 + h_2) + \ldots + (1 + h_n) = (1 + \theta_1) + \ldots + (1 + \theta_\nu).$$

Or le dernier membre de (21) est (n° **34**) le nombre cherché ρ des réduites d'Hermite équivalentes à (a, b, c); ρ *est donc égal* aussi au premier membre, c'est-à-dire *à la somme* $\Sigma(1 + h_i)$, *étendue aux quotients incomplets d'une période*, dans la fraction continue ω. Et cette période est, soit la période minima, soit son double (n^{os} **18** et **25**), selon que la forme (a, b, c) n'équivaut pas, ou équivaut, à $(-a, b, -c)$. D'autre part, il est clair que si (α, β, γ) est une réduite d'Hermite, équivalente à (a, b, c), la forme $(-\alpha, \beta, -\gamma)$ sera aussi une réduite d'Hermite [2], équivalente à $(-a, b, -c)$; donc, si la forme (a, b, c) équivaut à $(-a, b, -c)$, les réduites d'Hermite correspondantes se répartissent en couples de deux réduites, évidemment distinctes [3], (α, β, γ) et $(-\alpha, \beta, -\gamma)$.

Dès lors, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

36. Théorème. — *Le nombre des réduites d'Hermite équivalentes à une forme indéfinie (a, b, c), de déterminant non carré, s'obtient ainsi : on réduira en fraction continue ordinaire une quelconque, ω, des racines de la forme, et l'on prendra, dans cette fraction, les quotients incomplets $h_1, h_2, \ldots, h_m$ de la période minima; le nombre*

---

(1) Il s'agit de la période comprise entre les réduites $\frac{p_1}{q_1}$ et $\frac{p_1}{q_1}S$ (n° **16**) qui n'est pas nécessairement la période minima des quotients incomplets (n^{os} **18** et **19**).

(2) Car les demi-circonférences des formes (α, β, γ) et $(-\alpha, \beta, -\gamma)$ sont symétriques par rapport à Oy; si l'une pénètre dans D_0, il en est dès lors de même de l'autre.

(3) Car si $\alpha = 0$, $\gamma = 0$, le déterminant de (α, β, γ) serait carré parfait, cas exclu.

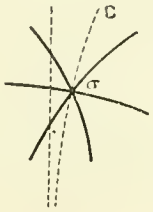
cherché sera $\Sigma(1+h_i)$. *On ne regardera pas comme distinctes deux réduites telles que* (α, β, γ) *et* $(-\alpha, \beta, -\gamma)$.

$\Sigma(1+h_i)$ est la somme des quotients incomplets de la période minima, augmentée du nombre de ces quotients.

37. *Cas d'exception.* — Nous avons supposé essentiellement (n° **32**) qu'il n'y a, sur la demi-circonférence C, de la forme (a, b, c), *aucun sommet modulaire;* dans le cas contraire, les raisonnements du n° **35** cesseraient d'être exacts.

Soit alors σ un sommet de domaine modulaire par lequel passe C, dans l'intervalle d'une période d'arcs : au point σ aboutissent *six* domaines modulaires, qui, autour de σ, présentent la disposition ci-dessous, et l'on voit, sur la figure, que la demi-circonférence C (marquée

Fig. 6.



en pointillé) traverse, aux environs de σ, *deux* domaines modulaires de moins que la droite $x=\omega$ (également pointillée).

En d'autres termes, le nombre $\Sigma(1+\theta_i)$, des domaines traversés par la droite dans un certain intervalle, n'est plus le nombre ρ des arcs d'une période sur C; il dépasse ρ de *deux* unités pour *chaque* point σ situé sur C dans l'intervalle d'une période d'arcs. Pour rétablir l'exactitude, il faudrait compter pour deux chacun des deux arcs de C qui ont σ pour une de leurs extrémités; alors ρ ainsi calculé serait encore $\Sigma(1+\theta_i)$, ou, d'après (21), encore valable ici, $\Sigma(1+h_i)$. Par suite :

*L'énoncé du théorème du n° **36** subsiste toujours, pourvu que l'on convienne de compter pour* DEUX *toute réduite d'Hermite dont la circonférence représentative passe par un des sommets (à distance finie) du domaine fondamental,* D_0, *du groupe modulaire.*

Ces sommets sont les points $\pm\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$.

Pour que la circonférence représentative d'une réduite (α, β, γ) d'Hermite passe par l'un d'eux, il faut et il suffit que $\alpha \pm \beta + \gamma = 0$.

Dans ce qui suit, nous dirons, pour abréger, que les formes (α, β, γ) et $(-\alpha, \beta, -\gamma)$ sont *inversement opposées*.

38. *Exemples.* — 1° Soit $(a, b, c) = X^2 - 14Y^2$. On trouve en tout *quatorze* réduites d'Hermite, non deux à deux inversement opposées; à savoir :

$$(1, 0, -14);\quad (1, \pm 1, -13);\quad (1, \pm 2, -10);\quad (1, \pm 3, -5);$$
$$(1, \pm 4, 2);\quad (2, \pm 4, 1);\quad (2, \pm 2, -5);\quad (2, 0, 7);$$

et, pour aucune, $\alpha \pm \beta + \gamma$ n'est nul.

D'autre part, en fraction continue,

$$\sqrt{14} = (3, \overline{1, 2, 1, 6}, \overline{1, 2, 1, 6}, \ldots);$$

la période est 1, 2, 1, 6, et l'on a bien

$$(1+1) + (1+2) + (1+1) + (1+6) = 14.$$

2° Soit $(a, b, c) = X^2 - 13Y^2$. — On trouve *vingt-deux* réduites, deux à deux inversement opposées, à savoir :

$$\pm(1, 0, -13);\quad \pm(1, \pm 1, -12);\quad \pm(1, \pm 2, -9);\quad \pm(1, \pm 3, -4);$$
$$\pm(3, \pm 2, -3);\quad \pm(3, \pm 1, -4);$$

nous devons n'en conserver que la moitié, celles par exemple, au nombre de *onze*, où le premier coefficient est positif.

Parmi celles-là, *quatre* vérifient $\alpha \pm \beta + \gamma = 0$, à savoir :

$$(1, \pm 3, -4) \quad \text{et} \quad (3, \pm 1, -4);$$

elles doivent donc être comptées deux fois, c'est-à-dire qu'il faut, à *onze*, ajouter *quatre*, ce qui donne *quinze*.

En fraction continue, on a

$$\sqrt{13} = (3, \overline{1, 1, 1, 1, 6}, \overline{1, 1, 1, 1, 6}, \ldots),$$

et l'on constate bien que

$$(1+1) + (1+1) + (1+1) + (1+1) + (1+6) = 15.$$

3° Soit

$$(a, b, c) = 2X^2 - 6XY - 2Y^2, \qquad D = 13, \qquad \sigma = 2.$$

On trouve les *huit* réduites (inversement opposées deux à deux) :

$$\pm(2, \pm 3, -2), \quad \pm(2, \pm 1, -6),$$

qui doivent compter pour *quatre;* aucune ne vérifiant $\alpha \pm \beta + \gamma = 0$, *quatre* est le nombre définitif.

D'ailleurs

$$\omega = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} = (3, 3, 3, \ldots);$$

la période est 3, et l'on a bien $1 + 3 = 4$.

59. *Période du développement hermitien.* — Nous avons vu (n° **54**) que ce développement est périodique, quand C ne passe par aucun sommet modulaire; on pourrait, en reprenant les raisonnements des n^os^ **54** et **18**, montrer que le fait est général, et que :

Le développement hermitien de ω, *racine de la forme* (a, b, c), *est toujours périodique; la période* $\mathfrak{P}$, qui se présente ainsi, n'est pas toujours la période minima; elle est telle qu'une fraction d'Hermite, $p_i : q_i$, et son *homologue* $p'_i : q'_i$, de la période suivante, sont liées par

$$\frac{p'_i}{q'_i} = \frac{p_i}{q_i} S,$$

S étant la substitution fondamentale précisée au n° **23**.

Lorsque (a, b, c) n'équivaut pas à $(-a, b, -c)$, $\mathfrak{P}$ est la période minima.

Lorsque (a, b, c) équivaut à $(-a, b, -c)$ et que C ne passe par aucun sommet modulaire, $\mathfrak{P}$ est la période minima répétée deux fois; alors une fraction d'Hermite $p_i : q_i$, et son homologue $p''_i : q''_i$, de la période (minima) suivante, sont liées par

$$\frac{p''_i}{q''_i} = \frac{p_i}{q_i} \Sigma_0,$$

Σ_0 étant la substitution définie au n° **23**.

Enfin, si (a, b, c) équivaut à $(-a, b, -c)$ et si C passe par des sommets modulaires, $\mathfrak{P}$ est soit la période minima, soit son double.

Nous allons reprendre la question directement, d'une manière géné-

rale, en étudiant l'existence et la formation de la période hermitienne, à partir de la fraction continue.

40. *Formation de la période. — Si, dans la fraction continue* ω, *la période minima ne renferme aucun quotient incomplet égal à* 1, il est clair, en vertu même de la formation du développement hermitien à partir de la fraction continue (I, n° **22**), que *la période minima hermitienne existe et coïncide avec celle de la fraction continue.*

Tout revient ainsi à voir si, étant donné dans la période minima π_0, de la fraction continue, un quotient incomplet 1, ce quotient subsiste ou non dans le développement hermitien; donc, en désignant par $p : q$ la réduite qui précède ce quotient 1, le problème est de reconnaître si les réduites homologues de $p : q$ (n° **23**) *finissent* ou non par subsister dans la suite des fractions d'Hermite.

Soient $p_1 : q_1, \ldots, p_m : q_m, \ldots$ ces réduites; nous savons (n° **23**) que

$$\frac{p_m}{q_m} = \frac{p}{q}\Sigma^m,$$

Σ désignant soit S, soit Σ_0, selon que (a, b, c) n'équivaut pas ou équivaut à $(-a, b, -c)$. En s'appuyant sur la théorie classique des substitutions semblables de (a, b, c), on en conclut :

$$\frac{p_m}{q_m} = \frac{p\dfrac{t_m}{\sigma} - (bp + cq)\dfrac{u_m}{\sigma}}{q\dfrac{t_m}{\sigma} + (ap + bq)\dfrac{u_m}{\sigma}}, \tag{22}$$

étant posé

$$\frac{t_m - u_m\sqrt{D}}{\sigma} = \left(\frac{t_0 - \eta u_0\sqrt{D}}{\sigma}\right)^m; \tag{23}$$

σ est 1 ou 2 selon que (a, b, c) est proprement ou improprement primitive;

t_0, u_0 est la plus petite solution positive de $t^2 - Du^2 = \pm\sigma^2$, où l'on prend au second membre $+$ ou $-$ selon que (a, b, c) n'équivaut pas ou équivaut à $(-a, b, -c)$; enfin on suppose que la racine, ω, qu'on a développée en fraction continue, est

$$\omega = \frac{-b + \eta\sqrt{D}}{a} \qquad (\eta = \pm 1),$$

ce qui définit η dans (23).

On reconnaît aisément que le numérateur et le dénominateur, dans le second membre de (22), sont des entiers premiers entre eux; il s'ensuit que p_m et q_m sont respectivement égaux à ces deux termes, *au même signe près*, c'est-à-dire qu'on a

$$(22\,bis)\qquad \begin{cases} \pm p_m = p\dfrac{t_m}{\sigma} - (bp + cq)\dfrac{u_m}{\sigma}, \\ \pm q_m = q\dfrac{t_m}{\sigma} + (ap + bq)\dfrac{u_m}{\sigma}, \end{cases}$$

les signes se correspondant.

On sait (I, n° **17**) que, si l'on nomme z le quotient *complet* qui suit la réduite $p_m : q_m$ (et par la périodicité, c'est aussi celui qui suit $p : q$) *la condition nécessaire et suffisante pour que $p_m : q_m$ soit fraction, d'Hermite* est qu'on ait, en désignant par $p'_m : q'_m$ la réduite précédente,

$$z > \frac{2q_m + q'_m}{q_m + 2q'_m},$$

c'est-à-dire

$$(24)\qquad q'_m(2z - 1) > q_m(2 - z).$$

C'est toujours vérifié si $z \geqq 2$; mais ici, par l'hypothèse faite sur le quotient *incomplet* qui suit $p : q$, le plus grand entier contenu dans z est 1; en sorte que

$$2 - z > 0 \qquad \text{et} \qquad 2z - 1 > 0.$$

L'inégalité (24) s'écrit donc

$$\frac{q'_m}{q_m} > \frac{2 - z}{2z - 1};$$

d'où, en vertu de (22 *bis*) et puisque q'_m et q_m sont essentiellement positifs,

$$(25)\qquad \left|\frac{q' t_m + (ap' + bq')u_m}{q t_m + (ap + bq)u_m}\right| > \frac{2 - z}{2z - 1},$$

$p' : q'$ étant la réduite qui précède $p : q$.

Il s'agit de reconnaître si (25) est vérifiée ou non pour toutes les valeurs de m supérieures à une limite finie.

Le premier membre, abstraction faite du signe de valeur absolue,

c'est-à-dire la quantité

$$(26)\qquad \frac{q' t_m + (ap' + bq') u_m}{q\ t_m + (ap + bq\ ) u_m},$$

a pour limite, quand m tend vers ∞, la quantité

$$(26\ bis)\qquad \frac{q' \eta \sqrt{D} + (ap' + bq')}{q\ \eta \sqrt{D} + (ap + bq\ )},$$

parce que, pour $m = \infty$, la limite de $t_m : u_m$, par (23), est $\eta\sqrt{D}$ [1].

Or la quantité (26 *bis*) a une expression très simple. On a posé en effet

$$\omega = \frac{-b + \eta\sqrt{D}}{a}, \qquad \omega' = \frac{-b - \eta\sqrt{D}}{a};$$

en s'appuyant sur l'équation

$$(27)\qquad \omega = \frac{pz + p'}{qz + q'}$$

que donne la théorie des réduites, et sur l'équation analogue pour z', irrationnelle conjuguée de z,

$$(27\ bis)\qquad \omega' = \frac{pz' + p'}{qz' + q'},$$

on voit de suite que (26 *bis*) est $-z'$.

Donc la limite de la quantité (26) est $-z'$; d'autre part, z, quotient complet de la partie périodique de ω, est périodique simple, en sorte (n° **21**) que z' est compris entre -1 et 0. Alors $-z'$ est *positif*, et dès lors (26), pour m assez grand, est *positive;* on peut donc, au premier membre de (25), supprimer le signe $|\quad|$ de valeur absolue.

Trois cas sont à distinguer :

1° $-z' > \frac{2-z}{2z-1}$. Alors l'inégalité (25) est toujours vérifiée pour m dépassant une certaine limite; les réduites homologues, $p_m : q_m$, de $p : q$, *finissent* donc par être toutes des fractions d'Hermite.

---

[1] Car, si $\eta = 1$, on écrit (23) :

$$(t_m - u_m\sqrt{D}) : (t_m + u_m\sqrt{D}) = (\pm\sigma^2)^m : (t_0 + u_0\sqrt{D})^m;$$

d'où la limite indiquée. Calcul analogue pour $\eta = -1$.

2° $-z' < \frac{2-z}{2z-1}$. Ces réduites finissent par n'être jamais des fractions d'Hermite.

3° $-z' = \frac{2-z}{2z-1}$. Il faut revenir à (25), en y remplaçant $(2-z):(2z-1)$ par $-z'$, et en y supprimant, au premier membre, *le signe de valeur absolue*.

L'inégalité (25) s'écrit ainsi :

$$\frac{ap' + q'\left(b + \frac{t_m}{u_m}\right)}{ap + q\left(b + \frac{t_m}{u_m}\right)} > -z'.$$

Mais $-z'$ est aussi, par ce qui précède, égal à la quantité (26 *bis*), en sorte qu'il vient

$$(28) \qquad \frac{ap' + q'\left(b + \frac{t_m}{u_m}\right)}{ap + q\left(b + \frac{t_m}{u_m}\right)} > \frac{ap' + q'(b + \eta\sqrt{D})}{ap + q(b + \eta\sqrt{D})}.$$

Le dénominateur du premier membre a pour limite ($m = \infty$) celui du second, qui est fixe et évidemment non nul; ces deux dénominateurs sont donc de même signe pour m assez grand, en sorte que dans (28), on peut chasser les dénominateurs, et l'on a alors, après réductions,

$$(29) \qquad a(pq' - qp')\left(\frac{t_m}{u_m} - \eta\sqrt{D}\right) > 0.$$

On vérifie facilement, par (23), que $\frac{t_m}{u_m} - \eta\sqrt{D}$ a le signe de $\eta(t_0 - u_0\sqrt{D})^m$, et (29) s'écrit finalement

$$(30) \qquad \eta a(pq' - qp')(t_0 - u_0\sqrt{D})^m > 0.$$

De là *deux sous-cas :*

1° ω *n'équivaut pas à* $-\omega$, c'est-à-dire qu'on a $t_0^2 - Du_0^2 = \sigma^2$; donc $t_0 - u_0\sqrt{D}$ est > 0; dès lors, toutes les réduites $p_m : q_m$ finissent par être, ou ne pas être, des fractions d'Hermite selon que

$$(31) \qquad \eta a(pq' - qp') > 0 \qquad \text{ou} \qquad \eta a(pq' - qp') < 0.$$

D'ailleurs $p' : q'$ et $p : q$ étant réduites consécutives de ω, on a $pq' - qp' = \pm 1$.

2° ω *équivaut à* $-\omega$, c'est-à-dire qu'on a $t_0^2 - Du_0^2 = -\sigma^2$; alors $t_0 - u_0\sqrt{D}$ est < 0 et (30) s'écrit

$$\eta a(pq' - qp')(-1)^m > 0. \tag{32}$$

Donc, des deux réduites homologues $p_m : q_m$ et $p_{m+1} : q_{m+1}$, l'*une* est fraction d'Hermite, et l'autre non; il faut donc ici doubler la période *minima* de ω, pour en déduire la période hermitienne *minima*.

L'*existence* de celle-ci résulte de cette analyse.

41. Sa *formation* en résulte aussi, car on sait voir, *dans tous les cas*, si un quotient incomplet 1, figurant dans la période π_0 (n° **40**), subsiste *ou* non dans la période hermitienne : il suffit de reconnaître, par les règles qu'on vient de donner, si les réduites homologues de celle, $p : q$, qui précède ce quotient, finissent par être, *ou* ne pas être, des fractions d'Hermite.

On peut d'ailleurs simplifier ces règles, en introduisant, au lieu de z ou de z', les réduites $p' : q'$ et $p : q$, grâce à (27) et (27 *bis*). On arrive ainsi à l'*énoncé final :*

Soit $p : q$ la réduite de ω [racine de la forme (a, b, c)] *qui précède un quotient incomplet*, 1, *de la période minima; soit $p' : q'$ la réduite qui précède $p : q$.*

Ce quotient 1 *sera conservé ou non dans la période du développement hermitien, selon que les deux quantités*

$$ap^2 + 2bpq + cq^2, \tag{33}$$

$$a(p^2 + pp' + p'^2) + b(2pq + 2p'q' + pq' + qp') + c(q^2 + qq' + q'^2) \tag{34}$$

sont, ou non, de signes contraires.

Dans le cas où la seconde quantité serait nulle : 1° si ω n'équivaut pas modulairement à $-\omega$, le quotient 1 considéré sera conservé, ou non, selon que

$$a(a\omega + b)(pq' - qp') \quad \text{sera} > 0 \text{ ou } < 0; \tag{35}$$

2° si ω équivaut modulairement à $-\omega$, il faudra doubler la période

minima de ω pour en déduire celle du développement, et la règle précédente (35) s'appliquera encore [1].

Remarques. — 1° Quand, dans la période de la fraction continue ω, on supprime un quotient incomplet 1, il va sans dire qu'on fait subir à cette fraction la modification (20) du n° **35**.

2° On établirait facilement que, si la quantité (34) s'annule, la demi-circonférence C passe par des sommets modulaires.

3° Dans l'usage des formules (33) à (35), il faut, puisqu'on a appliqué (22) à $p' : q'$ et à $p : q$, que ces deux réduites précèdent des quotients incomplets appartenant à la partie périodique de ω.

42. *Réduites principales d'Hermite.* — On appellera ainsi les réduites dont la circonférence représentative coupe *le côté curviligne* du domaine fondamental modulaire, D_0.

Il est évident qu'un arc, découpé par le domaine D, sur la circonférence C, représentative de (a, b, c), donnera naissance à une réduite principale s'il coupe la *base* de D; dès lors, si $p : q$ est pointe de domaines traversés par C, il correspond à $p : q$ deux arcs de cette nature, découpés sur C, l'un par le premier, l'autre par le dernier domaine de pointe $p : q$, que traverse C (I, n° **5**).

Dès lors, d'une manière générale :

Le nombre des réduites principales d'Hermite est double de celui des pointes distinctes des domaines modulaires traversés par C, *pendant une période d'arcs.*

Si C *ne passe par aucun sommet modulaire*, il résulte des n^{os} **33** et **34** que le nombre des pointes distinctes considérées est le même pour C et pour la droite $x = \omega$; donc que :

Le nombre des réduites principales d'Hermite est double de celui des termes (quotients incomplets) de la période $\mathfrak{P}$ (n° **39**), *dans le développement hermitien de* ω [2].

---

[1] Cela résulte aisément de (32) et de ce que, quand ω équivaut à $-\omega$, le nombre des termes de la période *minima*, dans la fraction continue ω, est *impair*.

[2] Par le n° **39**, $\mathfrak{P}$ est la période minima, ou son double, selon que ω n'équivaut pas, ou équivaut, à $-\omega$.

Pour traiter le cas où C passe par des sommets modulaires, supposons que nous choisissions pour ω la *seconde* racine de la forme (a, b, c),

$$\omega = \frac{-b + \sqrt{D}}{a};$$

la difficulté provient, comme au n° **37**, des réduites équivalentes à (a, b, c), dont la circonférence représentative passe par un des sommets, A ou B (I, *fig.* 1, n° **2**), du domaine fondamental D_0.

Si C désigne toujours la demi-circonférence de (a, b, c), suivie de ω' à ω, soit A l'*arc* de C qui aboutit à un sommet modulaire, σ, situé sur C : il lui correspond un arc réduit, λ_1, qui traverse D_0 et *aboutit* à A ou à B; supposons que ce soit à B. Cet arc, *prolongé* au delà de B, ira évidemment couper Ox en un point ω_1, situé entre les points $\frac{1}{2}$ et 1; au sortir de D_0 il pénètre donc dans un domaine de pointe $+1$.

De plus, si (α, β, γ) est la réduite (principale) d'Hermite, équivalente à (a, b, c), représentée par C_1, demi-circonférence qui porte l'arc λ_1, ω_1 sera la *seconde* racine de cette forme,

$$\omega_1 = \frac{-\beta + \sqrt{D}}{\alpha},$$

et il est clair géométriquement que ω_1 est la plus grande racine de la forme (α, β, γ); d'où $\alpha > 0$.

Enfin C_1 passant par B et contenant A à son intérieur, on aura

$$\alpha + \beta + \gamma = 0 \quad \text{et} \quad \alpha - \beta + \gamma < 0, \quad \text{d'où} \quad \beta > 0.$$

Inversement, λ_1 équivaut modulairement à une infinité d'*arcs* de C : si T est la substitution modulaire qui transforme λ_1 en A, et S celle, si souvent introduite, qui transforme C en C, les arcs cherchés seront les $\lambda_1 TS^m$. Prenons $m > 0$; nous pouvons le choisir assez grand pour que les $\lambda_1 TS^m$ s'approchent de ω, sur C, autant qu'on le voudra (n° **33**). Cherchons l'effet de la substitution $S^{-m}T^{-1}$, inverse de TS^m, sur la demi-droite $x = \omega$. D'abord S^{-m}, n'altérant pas ω, la change en une demi-circonférence, C', tangente à C en ω, et extérieure à C (*ibid.*); on peut évidemment prendre m assez grand pour que C' soit aussi voisine de C qu'on voudra. Cela résulte, soit du n° **33**, soit de ce

que S^{-m} transforme le point ∞ en un point de Ox, qui tend évidemment vers ω' pour $m = +\infty$. Alors la demi-droite $x = \omega$, qui va de ω au point ∞ devient bien une demi-circonférence, aussi voisine qu'on veut de C. Effectuant ensuite T^{-1}, on voit que $S^{-m}T^{-1}$ change C en C_1 et $x = \omega$ en une demi-circonférence, C'_1, *voisine* de C_1 et touchant C_1 en ω_1.

Distinguons maintenant deux cas :

1° C'_1 *est extérieure à* C_1. — Alors, en faisant la figure, on voit que C'_1, aux environs de B, traverse deux domaines modulaires que ne traverse pas C_1 (n° **57**) et de pointes respectives ∞ et $+1$: mais ces pointes sont pointes d'autres domaines traversés à la fois par C_1 et C'_1.

Enfin, à la région comprise entre C_1, C'_1 et l'axe des x, répond modulairement celle (infinie) comprise entre la demi-droite $x = \omega$, C et l'axe des x, à partir de ω' jusqu'à l'infini : or, en suivant C_1 vers ω_1, on laisse la première région à sa gauche; donc, en suivant C dans le sens correspondant, c'est-à-dire vers ω, on laissera aussi la seconde région à gauche, ce qui exige que ω soit plus grand que ω', donc que a soit *positif*. Comme déjà $\alpha > 0$, on aura $a\alpha > 0$.

2° C'_1 *est intérieure à* C_1. — On voit que C'_1, aux environs de B, traverse deux domaines modulaires que ne traverse pas C_1, et tous deux de pointe 0; de plus C_1 ne traverse aucun domaine de pointe 0.

Enfin, on reconnaît qu'ici ω est plus petit que ω', donc $a\alpha < 0$.

Mêmes conclusions, quand l'arc réduit λ_1 passe par A, pour les domaines traversés par C_1 et C'_1 aux environs de A, et pour le signe correspondant de $a\alpha$, c'est-à-dire que $a\alpha$ est > 0 ou < 0 selon que C'_1 ne traverse pas ou traverse des domaines de pointe 0 (non traversés par C_1).

Cela posé, rappelons (n° **42**) que les réduites principales d'Hermite équivalentes à (a, b, c) correspondent, par couple de deux, à chacun des changements de pointe dans la suite des domaines modulaires traversés par C, ou par C_1, dans l'intervalle d'une période d'arcs : les deux réduites d'un couple ont pour arcs les arcs réduits respectivement équivalents aux deux arcs de C (ou de C_1) qui précèdent et suivent immédiatement le changement de pointe.

C_1 étant toujours supposée passer par B, les deux réduites princi-

pales qui correspondent au changement de pointe dû à la traversée de B sont d'abord (α, β, γ), puis sa transformée par la substitution $|X, Y; X, X+Y|$, laquelle correspond à la substitution modulaire qui réduit l'arc faisant suite à λ_1 sur C_1. Cette seconde forme $(\alpha+2\beta+\gamma, \beta+\gamma, \gamma)$ a son premier coefficient *du même signe que* α, car, en vertu de $\alpha+\beta+\gamma=0$, il est égal à β, qui est positif; et sa circonférence représentative passe par A.

Appliquons les principes précédents au changement de pointe qu'entraîne la traversée du point B par C_1.

Dans les deux cas 1° et 2°, on passe de la pointe ∞ à la pointe $+1$. Mais, dans le cas 1°, la suite des domaines traversés par C'_1 présente (aux environs de B) le même changement de pointe; dans le cas 2° elle présente deux changements de pointe (de ∞ à 0 et de 0 à 1) : sous une autre forme, dans la suite d'Hermite que constituent les pointes des domaines traversés par $x=\omega$, correspondra à la traversée de B, dans le cas 1°, *le* passage d'une fraction (transformée de ∞ par TS^m) à la suivante (transformée de $+1$); et, dans le cas 2°, *deux* passages, celui d'une fraction (transformée de ∞) à la suivante (transformée de 0), et celui de cette dernière à la suivante (transformée de $+1$).

Les deux cas se distinguent l'un de l'autre par $a\alpha>0$ (premier cas) et $a\alpha<0$ (second cas).

Dès lors, si l'on veut maintenir la règle du n° **42**, à savoir que le nombre des réduites principales d'Hermite est double de celui des fractions d'Hermite (ou des quotients incomplets du développement hermitien) dans l'intervalle d'une période d'arcs, on voit, en s'appuyant aussi sur ce que les deux réduites principales qui correspondent à la traversée de B (ou de A) par C_1 ont leurs premiers coefficients de même signe, et leurs circonférences passant par B ou A, qu'il faudra compter pour *une* ou pour *deux* toute réduite principale (α, β, γ), dont l'arc représentatif passe par B ou A, selon que $a\alpha$ sera >0 ou <0.

De là l'énoncé *général* définitif suivant :

Soit (a, b, c) une forme indéfinie dont le déterminant n'est pas carré. Le nombre des réduites principales d'Hermite équivalentes à (a, b, c) est deux fois le nombre des quotients incomplets dans la période du développement hermitien de ω, seconde racine de la

forme, $[\omega = (-b + \sqrt{D}) : a]$, *à la condition de compter pour* DEUX *toute réduite* (α, β, γ) *pour laquelle le produit* $a\alpha$ *est négatif* ET *dont la demi-circonférence représentative passe par un des sommets à distance finie* A, B, *du domaine fondamental modulaire*, D_0. *Toute autre réduite compte pour une, et l'on regarde comme distinctes les réduites telles que* (α, β, γ) *et* $(-\alpha, \beta, -\gamma)$.

La période hermitienne dont il est ici question est celle qui est déduite (nos **40-41**) *de la période minima de la fraction continue* ω, *lorsque* ω *n'équivaut pas modulairement à* $-\omega$; *c'est celle qui est déduite du double de la période minima, dans le cas contraire* (¹).

La condition pour que la demi-circonférence de (α, β, γ) passe par A ou B est $\alpha \pm \beta + \gamma = 0$.

44. *Corollaire.* — Quand il y a des réduites principales (α, β, γ) à compter pour deux, c'est que C_1, entre un domaine de pointe ∞ et un domaine de pointe ± 1, traverse *deux* domaines de pointe 0 : il y aura donc, dans la période hermitienne, le quotient incomplet $2 - 1$ (I, n° **26**), ou 1.

Dès lors, s'il n'y a pas de quotient incomplet 1 dans cette période, chaque réduite principale comptera pour *une*.

Donnons maintenant des exemples, où l'on rencontrera les diverses circonstances qui peuvent se présenter.

45. *Exemples.* — 1° *Forme* $X^2 - 14Y^2$. — Remplaçons-la par la forme équivalente $(X - 3Y)^2 - 14Y^2$, où

$$a = 1, \qquad b = -3, \qquad c = -5 \qquad \text{et} \qquad \omega = 3 + \sqrt{14}.$$

Formons d'abord la période hermitienne pour ω. En fraction continue (ici périodique *simple*),

$$\omega = (\overline{6, 1, 2, 1}, \overline{6, 1, 2, 1}, \ldots)$$

et ω n'équivaut pas à $-\omega$.

(¹) Il serait aisé aussi d'établir une liaison entre les quotients *complets* de la période hermitienne et les réduites principales d'Hermite.

La période à considérer est donc

$$6,\quad 1,\quad 2,\quad 1,$$

et contient deux termes 1.

Le premier 1 suit la réduite $6:1$, que précède $1:0$; on a donc

$$p=6,\qquad q=1;\qquad p'=1,\qquad q'=0.$$

Avec ces valeurs, et celles ci-dessus de (a, b, c), les quantités (33) et (34) sont -5 et -1, donc de même signe, et le terme 1 est dès lors à supprimer.

Pour le second 1, on aurait

$$\frac{p}{q}=\frac{20}{3},\qquad \frac{p'}{q'}=\frac{7}{1},$$

d'où p, q, p', q'; les quantités (33) et (34) sont encore -5 et -1, et le second 1 est aussi à supprimer.

Le développement hermitien de ω a donc pour quotients successifs

$$\ldots,\ 7,\ 4,\ 8,\ 4,\ 8,\ 4,\ \ldots;$$

la période est 8, 4 et a *deux* termes; c'est ici celle à considérer (et non son double) pour évaluer le nombre des réduites principales, lequel est dès lors 2×2 ou *quatre*.

Parmi les réduites d'Hermite, données au n° **38**, 1°, les *principales* sont $(1, \pm 4, 2)$ et $(2, \pm 4, 1)$, et leurs demi-circonférences ne passent par aucun des *sommets* de D_0; leur nombre est *quatre*, comme le veut le théorème général.

2° *Forme* X^2-13Y^2. — Nous lui substituerons son équivalente, pour laquelle $a=1$, $b=-3$, $c=-4$; $\omega=3+\sqrt{13}$ et

$$\omega=(\overline{6,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1},\ \overline{6,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1},\ \ldots),$$

fraction périodique *simple*.

Ici ω équivaut à $-\omega$; nous devrons doubler la période minima.

Considérons d'abord celle-ci, 6, 1, 1, 1, 1; il y a quatre 1. Le premier 1 suit $p:q=6:1$, que précède $p':q'=1:0$. Alors la quantité (34) est nulle; (35) est -1; donc le 1 est à supprimer dans la

première période minima et à conserver dans la seconde [n° **40**, éq. (32)].

Le deuxième 1 suit $p : q = 7 : 1$, et l'on a

$$\frac{p'}{q'} = \frac{6}{1};$$

alors (33) et (34) sont $+3$ et -2, donc de signes contraires, et le 1 est à garder dans toutes les périodes.

Le troisième 1 suit $p : q = 13 : 2$, et l'on a $p' : q' = 7 : 1$; les quantités (33) et (34) sont -3 et $+2$; donc encore, le 1 se garde dans toutes les périodes.

Enfin le quatrième 1 suit $p : q = 20 : 3$, et l'on a $p' : q' = 13 : 2$; la quantité (34) est nulle; (35) est $+1$; donc le 1 se conserve dans la première période et se supprime dans la seconde.

Les quotients incomplets successifs du développement de ω sont donc, après les modifications dues aux suppressions de 1,

$$\ldots, 7, 2, 1, 1, 6, 1, 1, 2, 8, 2, 1, 1, 6, \ldots;$$

la période hermitienne est, abstraction faite de tout signe,

$$2, 1, 1, 6, 1, 1, 2, 8;$$

elle comprend *huit* termes, et c'est bien celle qu'on déduit de la période minima de la fraction continue, répétée deux fois.

Donc le nombre des réduites principales d'Hermite est $8 \times 2 = 16$.

Ces réduites, formées directement, sont :

$$(3, \pm 2, -3), \quad (-3, \pm 2, 3),$$
$$(1, \pm 3, -4), \quad (3, \pm 1, -4), \quad (-1, \pm 3, 4), \quad (-3, \pm 1, 4).$$

Les quatre, (α, β, γ), de la première ligne ne satisfont pas à $\alpha \pm \beta + \gamma = 0$; les huit de la seconde y satisfont, c'est-à-dire que leurs circonférences passent par un sommet de D_0. Parmi ces huit, quatre ont leur premier coefficient < 0, et comptent dès lors chacune pour 2; *toutes* les autres réduites, au nombre de $4 + 4$, ou 8, comptent respectivement pour une; donc le total est $4.2 + 8$ ou *seize*, ce qui vérifie le théorème.

3° *Forme* $X^2 - 3Y^2$; $\omega_1 = \sqrt{3}$, *non équivalent à* $-\omega_1$. — Prenons

$\omega = 1 + \sqrt{3}$, d'où $a = 1$, $b = -1$, $c = -2$; on a

$$\omega = (\overline{2, 1}, \overline{2, 1}, \ldots),$$

et la période est 2, 1. Le premier 1 suit la réduite $p : q = 2 : 1$, et $p' : q'$ est $1 : 0$. On trouve que la quantité (34) est nulle et que (35) est < 0; dès lors 1 se supprime dans toutes les périodes, et les quotients incomplets successifs du développement hermitien sont 3, 4, 4, ...; la période est 4 et n'a qu'un terme; il y aura donc *deux* réduites principales. On trouve effectivement que les réduites principales sont ici $(1, -1, -2)$ et $(1, 1, -2)$; leurs demi-circonférences passent par un sommet de D_0, car $\alpha \pm \beta + \gamma$ est nul pour chacune. D'autre part, les deux α sont positifs, comme a, de sorte que les deux réduites principales obtenues comptent respectivement pour une, d'où le nombre voulu, *deux*.

4° *Forme* $X^2 - 19Y^2$. — Prenons $\omega = 4 + \sqrt{19}$, d'où $a = 1$, $b = -4$, $c = -3$ et

$$\omega = (\overline{8, 2, 1, 3, 1, 2}, \ldots);$$

ω non équivalent à $-\omega$.

Le premier 1 de la période suit $p : q = 17 : 2$ et $p' : q' = 8 : 1$; la quantité (34) est nulle, et (35) est > 0, en sorte que le 1 se conserve dans toutes les périodes. On verrait qu'il en est de même du second 1. La période hermitienne est donc

$$8, \quad 2, \quad 1, \quad 3, \quad 1, \quad 2$$

et renferme *six* termes.

Les réduites principales sont ici

$$\begin{array}{ll} (\ \ 1, \pm 4, -3), & (-3, \pm 4, 1), \\ (-3, \pm 2, \ \ 5), & (-2, \pm 3, 5); \end{array}$$

les quatre de la seconde ligne vérifient seules $\alpha \pm \beta + \gamma = 0$; d'autre part leurs α étant négatifs, chacune doit compter pour *deux*. Le nombre total est donc $4 + 2.4$, ou *douze*, qui est bien le double du nombre, *six*, des termes de la période hermitienne.

Remarques sur certaines suites d'approximation;

PAR G. HUMBERT [1].

1. *But du travail.* — Soient ω une irrationnelle positive et ν un nombre donné, au moins égal à 2 : nous dirons qu'une fraction irréductible, $p : q$, est, pour ω, une fraction (ν) si l'on a

$$\left|\omega - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\nu q^2}. \tag{1}$$

On sait, puisque $\nu \geqq 2$, que toute fraction (ν) est une réduite ordinaire de ω; on trouvera donc les fractions (ν) en supprimant, dans la suite, S_0, des réduites successives, celles, $p : q$, qui ne satisfont pas à (1) : il restera alors une suite, que nous appellerons S_ν, et qui contiendra toutes les fractions (ν), rangées dans l'ordre des dénominateurs croissants. Mais rien ne prouve que S_ν existe, ni, surtout, que S_ν soit une suite *infinie*.

M. Hurwitz a établi [2], et le résultat est aujourd'hui classique, que S_ν existe toujours, et est infinie, pour $\nu = \sqrt{5}$: quelle que soit la simplicité de la démonstration de M. Hurwitz, on peut donner, de son théorème, une démonstration plus simple encore, et c'est là le premier objet du présent travail.

M. Hurwitz a montré ensuite (*Ibid.*), en s'appuyant sur une belle proposition de M. Markoff, que, si l'on excepte l'irrationnelle $\alpha = (1 + \sqrt{5}) : 2$, et celles qui équivalent modulairement à α ou à $-\alpha$, la suite répondant à $\nu = \sqrt{8}$ est une suite infinie pour toute irration-

[1] Nous renverrons aux deux Mémoires qui précèdent par les chiffres I et II.
[2] *Math. Ann.*, t. XXXIX, 1891, p. 279.

nelle : nous établirons également ce fait, d'une manière directe et élémentaire.

Puis, après avoir présenté quelques remarques sur la formation des suites S_2 et $S_{\sqrt{5}}$, nous montrerons que, quel que soit ν, la suite S_ν, si elle existe, possède, *pour un nombre quadratique*, ω, une sorte de périodicité; nous déduirons de là le théorème de M. Markoff; nous exprimerons enfin, d'une manière simple, la condition nécessaire et suffisante pour que ω admette une suite S_ν infinie.

2. *Premier théorème de M. Hurwitz.* — Je dis d'abord que, pour passer de S_0 à $S_{\sqrt{5}}$, on n'a *jamais* à supprimer *trois* réduites consécutives.

En premier lieu, il est clair que les réduites à supprimer sont parmi celles qui précèdent un des quotients incomplets 1 ou 2; supposons ensuite qu'on doive supprimer les réduites successives $p_0 : q_0$; $p_1 : q_1$; $p_2 : q_2$; c'est-à-dire qu'on ait

$$\left|\omega - \frac{p_0}{q_0}\right| \geqq \frac{1}{q_0^2\sqrt{5}}; \quad \left|\frac{p_1}{q_1} - \omega\right| \geqq \frac{1}{q_1^2\sqrt{5}}; \quad \left|\omega - \frac{p_2}{q_2}\right| \geqq \frac{1}{q_2^2\sqrt{5}}.$$

Ajoutant les deux premières inégalités membre à membre, et observant que ω est entre $p_0 : q_0$ et $p_1 : q_1$, on a, puisque $p_0 q_1 - p_1 q_0 = \pm 1$,

$$\frac{1}{q_0 q_1} \geqq \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{q_0^2} + \frac{1}{q_1^2}\right),$$

ce qu'on écrit

$$(2) \qquad q_1^2 - \sqrt{5}\, q_1 q_0 + q_0^2 \leqq 0 \quad \text{et, de même,} \quad q_2^2 - \sqrt{5}\, q_2 q_1 + q_1^2 \leqq 0.$$

Comme d'autre part $q_0 < q_1 < q_2$, et que l'équation $x^2 - \sqrt{5}x + 1 = 0$ a une racine entre 0 et 1, et une autre entre 1 et ∞, on tire de (2)

$$(3) \qquad \frac{q_1}{q_0} \leqq \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad \frac{q_2}{q_1} \leqq \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Enfin, si h_1 est le quotient incomplet qui suit $p_1 : q_1$, on a $q_2 = h_1 q_1 + q_0$, et la dernière inégalité (3) s'écrit

$$h_1 + \frac{q_0}{q_1} \leqq \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Par hypothèse, $h_1 = 1$ ou 2; or $h_1 = 2$ est impossible, le second membre étant < 2; donc $h_1 = 1$, et il reste

$$\frac{q_0}{q_1} \leqq \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{q_1}{q_0} \geqq \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Cela contredit la première inégalité (3), car le signe $=$ ne peut convenir, q_1 et q_0 étant entiers.

Donc, si $\nu = \sqrt{5}$, on ne supprime *jamais* trois réduites consécutives dans S_0, c'est-à-dire que, sur trois réduites consécutives, l'une au moins est une fraction $(\sqrt{5})$.

Corollaire I. — La suite $S_{\sqrt{5}}$ est dès lors infinie; *c'est le théorème de M. Hurwitz.*

Corollaire II. — Si l'on a à supprimer $p_1 : q_1$ et $p_2 : q_2$, réduites consécutives, il résulte de l'analyse précédente que $h_1 = 1$: donc, si deux réduites consécutives ne sont pas fractions $(\sqrt{5})$, le quotient incomplet qui suit la *première* est 1.

3. *Remarque.* — Si l'on reprend les calculs précédents en écrivant ν, au lieu de $\sqrt{5}$, les inégalités (3) deviennent

$$(4) \qquad \frac{q_1}{q_0} \leqq \mu; \qquad \frac{q_2}{q_1} \leqq \mu; \qquad \text{où} \qquad \mu = \frac{\nu + \sqrt{\nu^2 - 4}}{2};$$

de la seconde on tire

$$h_1 + \frac{q_0}{q_1} \leqq \mu.$$

Si $\mu < 2$, c'est-à-dire si $\nu < \frac{5}{2}$, on reconnaît encore que h_1 (qui est 1 ou 2, d'après cette valeur de ν) est nécessairement 1; alors, $q_1 : q_0 \geqq 1 : (\mu - 1)$; mais il n'y a contradiction avec la première (4) que si $1 : (\mu - 1) \leqq \mu$, d'où l'on tire aisément $\nu \leqq \sqrt{5}$.

La démonstration ne s'applique donc pas à un nombre $\nu > \sqrt{5}$; elle explique l'intervention du nombre $\sqrt{5}$ dans la question.

4. *Second théorème de M. Hurwitz.* — Soit $\nu = \sqrt{8}$. Les réduites à supprimer dans S_0 sont toujours (puisque $\nu < 3$) parmi celles qui

précèdent un des quotients incomplets 1 ou 2; je dis que, si l'on a supprimé k réduites consécutives ($k \geqq 3$), et si l'on choisit d'une manière quelconque *trois réduites consécutives* parmi ces k, celle du milieu précède nécessairement le quotient incomplet 1.

Supposons supprimées les trois réduites consécutives $p_0 : q_0$; $p_1 : q_1$ et $p_2 : q_2$; tout revient à établir que $h_1 = 1$, avec les notations précédentes.

On a, par les mêmes calculs qu'au n° **2**,

$$(5) \qquad \frac{q_1}{q_0} \leqq \frac{\sqrt{8}+2}{2} = 1 + \sqrt{2} \qquad \text{et} \qquad \frac{q_2}{q_1} \leqq 1 + \sqrt{2}.$$

De la seconde on tire encore

$$h_1 + \frac{q_0}{q_1} \leqq 1 + \sqrt{2}.$$

Mais $h_1 = 1$ ou 2; si $h_1 = 2$, on aurait

$$\frac{q_0}{q_1} \leqq (\sqrt{2} - 1),$$

ou

$$\frac{q_1}{q_0} \geqq \frac{1}{\sqrt{2}-1} = 1 + \sqrt{2}$$

d'où contradiction avec la première (5). Donc $h_1 = 1$. C. Q. F. D.

Nota. — La démonstration ne s'applique pas pour $\nu^2 > 8$; car, en gardant les notations du n° **3**, la contradiction n'existe que si

$$1 : (\mu - 2) \leqq \mu, \qquad \text{d'où} \qquad \mu \leqq 1 + \sqrt{2} \qquad \text{et} \qquad \nu \leqq 2\sqrt{2}.$$

5. *Corollaire.* — Si, dans la fraction continue ω, les quotients incomplets sont, à partir d'un certain rang, tous égaux à 1, ω équivaut modulairement à α ou à $-\alpha$, en désignant par α la fraction $1 + \frac{1}{1+\ddots}$, et $\alpha = (1 + \sqrt{5}) : 2$.

En tout autre cas, il y a, dans la fraction, *une infinité* de quotients incomplets au moins égaux à 2, et il résulte alors du numéro précédent que *toutes* les réduites de ω ne pourront pas être supprimées, dans le passage à $S_{\sqrt{8}}$, à partir d'un rang fini donné, *d'ailleurs quelconque*. Sous une autre forme, la suite $S_{\sqrt{8}}$ est infinie pour une irrationnelle ω,

non équivalente modulairement à α ou à $-\alpha$; *c'est le second théorème de M. Hurwitz.*

6. *Suite de Minkowski* (¹). — C'est S_2. On établit comme au n° **2** que, pour passer de S_0 à S_2, on n'a jamais à supprimer *deux* réduites consécutives de ω. D'autre part, les réduites à supprimer ne peuvent être (puisque $\nu = 2$) que parmi celles qui précèdent le quotient incomplet 1, et de là résulte un développement de ω en fraction continuelle, par le procédé indiqué (I, n° **22**) pour déduire le développement hermitien de la fraction continue :

$$\omega = \theta_0 + \cfrac{\varepsilon_1}{\theta_1 + \cfrac{\varepsilon_2}{\theta_2 + \cdots}} \qquad (\varepsilon_i = \pm 1).$$

Ce développement coïncide avec celui que Minkowski obtient directement; les fractions successives qu'il fournit donnent, dans leur ordre, les termes de S_2.

7. *Remarques sur les suites* $S_{\sqrt{5}}$ *et* S_2. — De ce qui précède résulte aisément un procédé pour former chacune de ces deux suites à partir de ses deux premiers termes.

Il suffit d'observer que, si l'on connaît deux réduites consécutives $p_1 : q_1$ et $p : q$, de ω, la réduite suivante est $(p\theta + p') : (q\theta + q')$, en désignant par θ l'entier maximum contenu dans le quotient complet $(p' - q'\omega) : (q\omega - p)$.

Soient alors $p_0 : q_0$ et $p : q$ deux termes consécutifs de $S_{\sqrt{5}}$; on reconnaît facilement (²) que la *réduite* $p' : q'$, de ω, qui précède $p : q$, est donnée par les formules suivantes, où l'on a posé

$$a = |pq_0 - qp_0| :$$

(¹) *Math. Ann.*, t. LIV, 1901, p. 91-124.

(²) On suppose successivement que, entre $p_0 : q_0$ et $p : q$, il y a eu 1, 0 ou 2 réduites supprimées, lesquelles précèdent alors des quotients incomplets 1 ou 2. De là les trois cas à distinguer. On utilisera le corollaire II du n° 2 ci-dessus.

1° Si $\left(\omega - \frac{p}{q}\right)\left(\omega - \frac{p_0}{q_0}\right) > 0$, on aura

$$p' = \frac{p - p_0}{a}, \qquad q' = \frac{q - q_0}{a} \qquad \text{et nécessairement} \qquad a = 1 \text{ ou } 2;$$

2° Si $\left(\omega - \frac{p}{q}\right)\left(\omega - \frac{p_0}{q_0}\right) < 0$ et $a = 1$, on aura

$$p' = p_0, \qquad q' = q_0;$$

3° Si $\left(\omega - \frac{p}{q}\right)\left(\omega - \frac{p_0}{q_0}\right) < 0$ et $a > 1$, on aura

$$p' = \frac{p - (a-1)p_0}{a}, \qquad q' = \frac{q - (a-1)q_0}{a} \qquad \text{et} \qquad a = 2 \text{ ou } 3.$$

On a ainsi p' et q', sans avoir de *congruence* à résoudre.

Il ne restera qu'à former (au plus) les *trois* réduites de ω qui suivent $p:q$, et la première d'entre elles qui sera une fraction $(\sqrt{5})$ sera le terme de $S_{\sqrt{5}}$ venant après $p:q$.

Pour la suite S_2, avec les mêmes notations :

1° Si $\left(\omega - \frac{p}{q}\right)\left(\omega - \frac{p_0}{q_0}\right) < 0$, on aura

$$p' = p_0, \qquad q' = q_0;$$

2° Si $\left(\omega - \frac{p}{q}\right)\left(\omega - \frac{p_0}{q_0}\right) > 0$, on aura

$$p' = p - p_0, \qquad q' = q - q_0,$$

et il ne restera qu'à former (au plus) les *deux* réduites qui suivent $p:q$; la première qui sera une fraction (2) donnera le terme suivant de S_2. Cette règle, pour S_2, revient à celle de Minkowski.

8. *Cas de ω quadratique.* — Nous allons, dans ce cas, mettre en évidence une sorte de *périodicité* de la suite S_ν, quel que soit ν.

Voici comment on peut poser la question :

Soit l'irrationnelle (positive)

$$\omega = \frac{-b + \eta\sqrt{D}}{a} \qquad (\eta = \pm 1),$$

racine de la forme quadratique (a, b, c) à coefficients entiers et de déterminant D. La fraction continue qui représente ω est périodique : cette périodicité se manifeste directement dans la suite des quotients incomplets; dans la suite des réduites elles-mêmes, elle se manifeste *indirectement* de la manière suivante :

Soit $p : q$ une réduite, arrêtée à un certain quotient incomplet d'une période; celle, $p_1 : q_1$, arrêtée au même quotient (de même rang) de la période suivante sera dite sa première *homologue*, et l'on définit de même les *homologues* successives, $p_2 : q_2; \ldots, p_m : q_m$; or on a vu (II, n^{os} **23** et **40**) que $p_1 : q_1$ se déduit de $p : q$ par une substitution linéaire fixe, Σ, qui ne dépend que de ω, et l'on a donné [II, n° **40**, éq. (22)] l'expression de $p_m : q_m$ en fonction de $p : q$, déduite de la relation symbolique

$$\frac{p_m}{q_m} = \frac{p}{q}\Sigma^m.$$

On peut dès lors se demander si une périodicité de cette nature se manifeste dans la suite S_ν; la réponse est affirmative et résulte aisément des formules du Mémoire II.

9. Soient, avec les notations de II (n° **40**), $p'_m : q'_m$ la réduite de ω qui précède $p_m : q_m$; z le quotient complet qui suit $p_m : q_m$ (*et c'est aussi celui qui suit* $p : q$); on a

$$\omega = \frac{p_m z + p'_m}{q_m z + q'_m},$$

et la condition pour que $p_m : q_m$ soit une fraction (ν) s'écrit

$$\left|\frac{p_m z + p'_m}{q_m z + q'_m} - \frac{p_m}{q_m}\right| < \frac{1}{\nu q_m^2},$$

ou, puisque $|p_m q'_m - q_m p'_m| = 1$,

$$\frac{q'_m}{q_m} > \nu - z. \tag{6}$$

Or on a vu (II, n° **40**) que, lorsque m tend vers $+\infty$, le premier membre de (6) tend vers $-z'$, en désignant par z' l'irrationnelle quadratique conjuguée de z, de sorte qu'il y a à distinguer trois cas :

1° $-z' > \nu - z$. — Alors (6) est vérifiée dès que m dépasse une certaine limite, c'est-à-dire que les réduites homologues successives de $p:q$ *finissent* par être toutes des fractions (ν).

2° $-z' < \nu - z$. — Ces réduites *finissent* par n'être jamais des fractions (ν).

3° $-z' = \nu - z$. — L'inégalité (6) se trouve remplacée, en vertu des calculs de II (n° **40**), par l'inégalité (28) de ce numéro, ramenée elle-même à l'inégalité (30). De là, en désignant par $p':q'$ la réduite qui précède $p:q$, les *deux sous-cas :*

1° ω n'équivaut pas modulairement à $-\omega$; les $p_m : q_m$ *finissent* par être, ou ne pas être, des fractions (ν) selon que

$$\eta a(pq' - qp') > 0 \quad \text{ou} \quad \eta a(pq' - qp') < 0;$$

2° ω équivaut à $-\omega$; l'inégalité nécessaire et suffisante pour que $p_m : q_m$ soit fraction (ν) est

$$\eta a(pq' - qp')\ (-1)^m > 0;$$

donc, de deux réduites homologues consécutives, l'une est fraction (ν) et l'autre ne l'est pas.

10. En utilisant

$$(6\ bis) \qquad \omega = (pz + p') : (qz + q')$$

et l'équation analogue en ω', z' (ω' conjuguée de ω), on met l'inégalité $-z' > \nu - z$, ou $z - z' > \nu$, sous la forme

$$(7) \qquad \frac{2\eta\sqrt{D}(pq' - qp')}{ap^2 + 2bpq + cq^2} > \nu.$$

On peut simplifier, car le premier membre est, par formation, $z - z'$; d'autre part, z est une fraction périodique simple, d'après sa définition même, et $z > 1$; en sorte que, par un résultat classique, z' est entre 0 et -1, et $z - z'$ est positif. On pourra donc remplacer le premier membre de (7) par sa valeur absolue, et écrire, puisque $pq' - qp' = \pm 1$,

$$(7\ bis) \qquad \frac{2\sqrt{D}}{|ap^2 + 2bpq + cq^2|} > \nu.$$

Cela posé, voici dès lors le *résultat final.*

Soit $\omega = (-b + \eta\sqrt{D}) : a$, avec $\eta = \pm 1$, une racine positive de la forme (a, b, c); soient

$$(8) \qquad \frac{p_1}{q_1}, \quad \frac{p_2}{q_2}, \quad \ldots, \quad \frac{p_\rho}{q_\rho}$$

les réduites de ω précédant les quotients incomplets qui forment une période (minima) de la fraction continue ω; supposons aussi que la réduite $p_0 : q_0$, qui vient avant $p_1 : q_1$, précède également un quotient de la partie périodique.

Nous supprimerons, dans la suite finie (8), *certains termes, selon la loi suivante :*

La réduite $p_i : q_i$ $(i = 1, 2, \ldots, \rho)$ *sera conservée* ou *supprimée* selon qu'on aura

$$(9) \qquad \frac{2\sqrt{D}}{|ap_i^2 + 2bp_iq_i + cq_i^2|} > \nu \quad \text{ou} \quad < \nu.$$

Si, au lieu de l'un des signes $>$ *ou* $<$, *on a le signe* $=$, *la réduite* $p_i : q_i$ *sera conservée* ou *supprimée* selon qu'on aura

$$\eta a(p_iq_{i-1} - q_ip_{i-1}) > 0 \quad \text{ou} \quad < 0.$$

Toutefois, si le signe $=$ se présente pour au moins une valeur de i, *et* si ω équivaut modulairement à $-\omega$, il faudra doubler la série (8) en y ajoutant les réduites de la période suivante, et opérer sur la série doublée comme sur (8).

Soient alors

$$(10) \qquad \frac{p'_1}{q'_1}, \quad \frac{p'_2}{q'_2}, \quad \ldots, \quad \frac{p'_r}{q'_r}$$

les termes conservés dans la suite (8), *doublée au besoin, selon les règles ci-dessus ; si l'on désigne toujours par* Σ *la substitution linéaire définie* II, n° **40**, *les termes successifs de la suite* S_ν, *à partir d'un rang fini, seront*

$$\frac{p'_1}{q'_1}\Sigma^m, \quad \ldots, \quad \frac{p'_r}{q'_r}\Sigma^m; \quad \frac{p'_1}{q'_1}\Sigma^{m+1}, \quad \ldots, \quad \frac{p'_r}{q'_r}\Sigma^{m+1}; \quad \frac{p'_1}{q'_1}\Sigma^{m+2}, \quad \ldots,$$

c'est-à-dire les transformés des termes (10) *par* Σ^m, Σ^{m+1}, ...

Toutefois, dans le cas où l'on aurait doublé la suite (8), il faudra écrire Σ^2 au lieu de Σ.

De là résulte la *périodicité* de S_ν, dans le sens où nous l'avons entendue.

11. *Corollaire.* — La condition nécessaire et suffisante pour que S_ν existe et soit infinie est que la suite (10) comprenne au moins un terme. On saura donc, ω étant un nombre quadratique donné, reconnaître si une suite *infinie* S_ν existe pour ce nombre, et cela *par un nombre limité d'opérations* (*voir* plus bas, n° **15**).

12. *Théorèmes de M. Markoff.* — 1° Si $\nu = \sqrt{5}$, nous savons que S_ν est infinie pour toute irrationnelle ω; donc, si ω est quadratique, la suite (10) correspondante comprend au moins un terme, c'est-à-dire que l'on a, au moins pour une valeur de i, en vertu de (9),

$$\frac{2\sqrt{D}}{|ap_i^2 + 2bp_iq_i + cq_i^2|} \geqq \sqrt{5}.$$

En d'autres termes, *on peut donner à x, y, dans une forme indéfinie $ax^2 + 2bxy + cy^2$, à coefficients entiers et de déterminant* D, *des valeurs entières rendant la forme inférieure ou égale, en module, à* $2\sqrt{\frac{D}{5}}$.

2° Si $\nu = \sqrt{8}$, nous avons vu que S_ν est infinie, sauf pour les nombres équivalents à $\pm\alpha$, où $\alpha = (1 + \sqrt{5}) : 2$. Donc, par le même raisonnement, *on peut donner à x, y, dans une forme indéfinie (a, b, c), non équivalente à la forme $2x^2 - 2xy - 2y^2$, ou à un de ses multiples, des valeurs entières rendant (a, b, c) au plus égale, en module, à* $2\sqrt{\frac{D}{8}}$.

Ces théorèmes, énoncés sans démonstration par Korkine et Zolotareff [1], ont été établis et généralisés par M. Markoff [2].

---

[1] *Math. Ann.*, t. VI, 1873, p. 369.

[2] *Ibid.*, t. XV, 1879, p. 382.

15. *Autre point de vue.* — La condition nécessaire et suffisante pour que ω admette une suite infinie, S_ν, peut être présentée autrement.

Pour préciser, supposons que ω soit la *première* racine de la forme (a, b, c), c'est-à-dire que $\eta = -1$. On sait que les z et z' du n° **9**, ou $-z$ et $-z'$, sont les racines d'une *réduite de Gauss* (A, B, C), équivalente à (a, b, c) : nous entendons par réduites de Gauss celles même définies dans les *Disquisitiones*, mais en appelant première racine $(-B-\sqrt{D}) : A$.

Il résulte alors du n° **9** que :

La condition nécessaire et suffisante pour que ω, positif et première racine de la forme (a, b, c), de déterminant D, *admette une suite S_ν infinie, est que, parmi les réduites de Gauss* (A, B, C), *équivalentes à (a, b, c), il en existe une, au moins, dont les racines aient une différence supérieure ou égale (en valeur absolue) à ν, c'est-à-dire telle que $2\sqrt{D} \geqq |A|\nu$.*

Toutefois (n° **9**, 3°) lorsque ω n'équivaut pas modulairement à $-\omega$, si, pour aucune des réduites (A, B, C), on n'a $2\sqrt{D} > |A|\nu$, mais si seulement $2\sqrt{D} = |A|\nu$ pour certaines d'entre elles, il y a une *condition supplémentaire* à ajouter, celle exprimée par $\eta a(pq' - qp') > 0$. On peut la transformer ainsi :

Soit (A, B, C) une réduite pour laquelle $2\sqrt{D} = |A|\nu$; ses racines sont z et z', ou $-z$ et $-z'$. Comme, dans les réduites de Gauss, B est positif, et que d'ailleurs, en vertu de $-1 < z' < 0 < 1 < z$, la somme $z + z'$ est toujours positive, les racines de (A, B, C) sont z et z', ou $-z$ et $-z'$, selon que A est négatif ou positif.

1° $A < 0$. — Par (6 *bis*) ω équivaut à z ou à $-z$, selon que

$$pq' - qp' = +1 \text{ ou } -1;$$

on en conclut que z est première racine de (A, B, C) si $pq' - qp'$ est $+1$, seconde, si -1 ; donc, en général,

$$z = \frac{-B - (pq' - qp')\sqrt{D}}{A}.$$

2° $A > 0$. — C'est $-z$ qui est racine de (A, B, C), et l'on trouve de même

$$-z = \frac{-B + (pq' - qp')\sqrt{D}}{A}.$$

Donc, en général,

$$z = \frac{\pm B - (pq' - qp')\sqrt{D}}{A}.$$

Enfin, si $(\operatorname{sgn} A)$ désigne le signe de A, c'est-à-dire $A : |A|$, on a évidemment, dans tous les cas, puisque $z > z'$,

$$z = \frac{\mp B + (\operatorname{sgn} A)\sqrt{D}}{A};$$

d'où, par comparaison,

$$-(pq' - qp') = (\operatorname{sgn} A).$$

Alors, l'inégalité $\eta a(pq' - qp') > 0$, où $\eta = -1$, s'écrit $a(\operatorname{sgn} A) > 0$, c'est-à-dire que a et A doivent être de même signe.

Donc, quand ω n'équivaut pas modulairement à $-\omega$, si, pour aucune des réduites (A, B, C) équivalentes à (a, b, c), on n'a

$$2\sqrt{D} > |A|\nu,$$

mais si seulement $2\sqrt{D} = |A|\nu$ pour certaines d'entre elles, il faut et il suffit, pour que ω admette une suite S_ν infinie, que, dans l'une au moins de ces dernières, le premier coefficient, A, ait le signe de a.

C'est la *condition supplémentaire cherchée*.

14. *Exemples.* — 1° Soit $\omega = \frac{10 - \sqrt{79}}{3}$; la forme (a, b, c) est $(3, -10, 7)$, et non $(-3, 10, -7)$, puisque ω doit être *première* racine.

Les réduites de Gauss, équivalentes à (a, b, c), sont

$$(-10, 7, 3); \quad (3, 8, -5); \quad (-5, 7, 6); \quad (6, 5, -9); \quad (-9, 4, 7); \quad (7, 3, -10).$$

Pour ces réduites, le maximum, en valeur absolue, de la différence entre les deux racines, est $\frac{2}{3}\sqrt{79}$, et correspond à la *seconde* réduite.

Donc, si ν est inférieur à $\frac{2}{3}\sqrt{79}$, la suite S_ν, pour ω, est infinie.

Si $\nu = \frac{2}{3}\sqrt{79}$, comme ω n'équivaut pas modulairement à $-\omega$, on est dans le cas douteux. Mais ici $a = 3$; et, dans la *seconde* réduite, $A = 3$, en sorte que $Aa > 0$: donc encore, pour ω, S_ν *est infinie*.

Enfin, si $\nu > \frac{2}{3}\sqrt{79}$, il n'y a pas de S_ν infinie pour ω.

2° Soit $\omega = \frac{7+\sqrt{79}}{5}$; (a, b, c) est $(-5, 7, 6)$; les réduites de Gauss équivalentes sont celles ci-dessus. On a les mêmes conclusions respectives que tout à l'heure, pour ν $\frac{2}{3}\sqrt{79}$; mais, si $\nu = \frac{2}{3}\sqrt{79}$, comme $a = -5$ et $A = 3$, on voit que $Aa < 0$; donc S_ν *n'est pas infinie* pour ω.

13. *Corollaire.* — Pour un nombre quadratique, ω, racine de la forme (a, b, c), de déterminant D, les nombres ν, pour lesquels la suite S_ν est infinie, ne dépassent pas $2\sqrt{D} : |A|$, où A est le plus petit, en valeur absolue, parmi les premiers coefficients des réduites de Gauss équivalentes à (a, b, c); si l'on veut, $|A|$ est le *minimum*, en valeur absolue, de la forme (a, b, c).

Remarque. — Il serait aisé de voir qu'on peut, au n° **13**, supprimer la condition que ω soit la *première* racine de (a, b, c): *avec les mêmes énoncés*, ω peut être la seconde.

ERRATUM. — Ce Volume, page 100, ligne 14, *au lieu de* précède, *lire* suit.

Des limites des zéros d'un polynome;

Par S.-B. KELLEHER,

Trinity College, Dublin.

I. Soit $1 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$ un polynome dont les coefficients peuvent être réels ou imaginaires.

Si l'on pose

$$\frac{1}{1 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n} = A_0 + A_1 z + \ldots + A_p z^p + \frac{R}{1 + a_1 z + \ldots + a_n z^n},$$

où p est un nombre entier $> 2n$, on trouve

$$\begin{aligned}
0 &= -1 + A_0, \\
0 &= \quad A_0 a_1 + A_1, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
0 &= \quad A_0 a_{q-1} + A_1 a_{q-2} + \ldots + A_{q-2} a_1 + A_{q-1}, \\
0 &= A_q + A_0 a_q + A_1 a_{q-1} + \ldots + A_{q-2} a_2 + A_{q-1} a_1,
\end{aligned}$$

où les coefficients $a_q, \ldots$ sont nuls pour $q > n$.

Donc

$$A_q = (-1)^q \begin{vmatrix} a_1 & 1 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_2 & a_1 & 1 & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_3 & a_2 & a_1 & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \ldots & \ldots \\ a_{q-1} & a_{q-2} & \ldots & \ldots & a_1 & 1 \\ a_q & a_{q-1} & \ldots & \ldots & a_2 & a_1 \end{vmatrix},$$

$$R = z^{p+1}(A_p a_1 + A_{p-1} a_2 + \ldots + A_{p-n+1} a_n) + \ldots + z^{p+n} A_p a_n.$$

Par le théorème de M. Hadamard sur la limite supérieure d'un

déterminant

$$|A_q| \geqslant \alpha(1+|a_1|^2+|a_2|^2+\ldots+|a_n|^2)^{\frac{q-n-1}{2}} \qquad \text{pour} \qquad q>n,$$

où

$$\alpha = [\quad (1+|a_1|^2)(1+|a_1|^2+|a_2|^2)\ldots$$
$$\times(1+|a_1|^2+|a_2|^2+\ldots+|a_n|^2)(|a_1|^2+|a_2|^2+\ldots+|a_n|^2)]^{\frac{1}{2}};$$

donc si

$$|z| < \frac{1}{(1+|a_1|^2+|a_2|^2+\ldots+|a_n|^2)^{\frac{1}{2}}},$$

on a

$$|R| \geqslant \frac{n(n+1)}{1.2}\alpha\beta(1+|a_1|^2+|a_2|^2+\ldots+|a_n|^2)^{\frac{p-n-1}{2}}|z|^{p+1},$$

où β est la plus grande des quantités $|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_n|$.

$|R|$ peut donc devenir aussi petit que nous voulons en prenant p assez grand. On a aussi

$$|A_0+A_1z+\ldots+A_pz^p| \geqslant |A_0|+|A_1||z|+\ldots+|A_n||z^n|$$
$$+\alpha|z|^{n+1}\frac{1-\left[|z|(1+|a_1|^2+\ldots+|a_n|^2)^{\frac{1}{2}}\right]^{p-n}}{1-|z|(1+|a_1|^2+\ldots+|a_n|^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$|A_0+A_1z+A_2z^2+\ldots+A_pz^p|$ est donc borné.

Mais on a identiquement

$$1-R=(1+a_1z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n)(A_0+A_1z+\ldots+A_pz^p),$$

donc

$$|1-R|=|1+a_1z+\ldots+a_nz^n||A_0+A_1z+\ldots+A_pz^p|;$$

mais

$$|1-R|>1-|R|>0 \qquad \text{pour} \qquad |z|<\frac{1}{(1+|a_1|^2+\ldots+|a_n|^2)^{\frac{1}{2}}},$$

et $|A_0+A_1z+\ldots+A_pz^p|$ ne peut devenir infini; donc

$$|1+a_1z+\ldots+a_nz^n$$

ne peut devenir nul pour

$$|z|<\frac{1}{(1+|a_1|^2+\ldots+|a_n|^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

II. En posant $z' = \frac{1}{z}$ dans le polynome $1 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$, on obtient le polynome

$$1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} z' + \frac{a_{n-2}}{a_n} z'^2 + \ldots + \frac{1}{a_n} z'^n$$

qui ne peut devenir nul pour

$$|z'| < \frac{|a_n|}{(1 + |a_1|^2 + \ldots + |a_n|^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Le polynome

$$1 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n$$

n'a donc pas de zéros à l'extérieur du cercle de rayon

$$\frac{(1 + |a_1|^2 + \ldots + |a_n|^2)^{\frac{1}{2}}}{|a_n|}.$$

III. Le même raisonnement montre que la fonction entière

$$1 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + \text{ad. inf.}$$

n'a pas de zéros à l'intérieur du cercle de rayon

$$\frac{1}{(1 + |a_1|^2 + |a_2|^2 + \ldots + \text{ad. inf.})^{\frac{1}{2}}}$$

si la série $1 + |a_1|^2 + |a_2|^2 + \ldots + \text{ad. inf.}$ est convergente.

Sur le développement des intégrales du problème des trois corps.

(SECONDE PARTIE.)

PAR K. BOHLIN.

1. Après les recherches [1], poursuivies et récemment achevées, sur la forme des développements des intégrales du problème des trois corps (application à l'orbite étudiée par von Hærdtl), il nous reste à donner aux séries trouvées une forme systématique et, en particulier, à déterminer les signes propres de leurs termes individuels. Ces signes étant connus pour tous les termes actuellement déterminés, il ne s'agit guère que des signes des termes, dont nous avons eu soin de compléter les expressions trouvées en vue d'atteindre, autant qu'il est possible, la forme générale des séries dont il s'agit.

Abstraction faite des signes et de certains coefficients, la forme des séries considérées dans notre cas se trouve donnée pour les développements en *cosinus* par

$$(1)\qquad f = \begin{vmatrix} p_0(0) \\ p_0(1) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_1(0) \\ p_1(1) \\ p_1(2) \\ p_1(3) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_2(2) \\ p_2(3) \\ p_2(4) \\ p_2(5) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_3(4) \\ p_3(5) \\ p_3(6) \\ p_3(7) \end{vmatrix} + \ldots$$

[1] Voir : *Sur le développement des intégrales du problème des trois corps* (*Arkiv för Math. Astron. Physik. Vetenskaps Akademien, Stockholm*, Bd VIII, n° 35; Bd IX, n° 23; Bd IX, n° 34; Bd X, n° 8; Bd X, n° 26; Bd X, n° 33), ainsi que *Sur le développement des intégrales du problème des trois corps*. Première Partie (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 7e série, fasc. 4, 1915).

et pour les développements en *sinus* par l'expression analogue

$$(2)\qquad f = \begin{vmatrix} q_0(0) \\ q_0(1) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} q_1(0) \\ q_1(1) \\ q_1(2) \\ q_1(3) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} q_2(2) \\ q_2(3) \\ q_2(4) \\ q_2(5) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} q_3(4) \\ q_3(5) \\ q_3(6) \\ q_3(7) \end{vmatrix} + \ldots$$

Tout assemblage de quatre termes dans ces expressions a été nommé un *complexe*, et le premier groupe un *demi-complexe*. Dans les cas analogues précédemment considérés sur les racines de l'équation du cinquième degré (¹) et sur les expressions des distances de masses s'attirant au nombre de trois (²), la répartition des signes dans ces complexes est simplement et partout

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} + \\ - \\ + \\ - \end{vmatrix}$$

de manière que toutes les fonctions f s'évanouissent pour certaines valeurs de la variable indépendante, telles que pour ces valeurs tout élément simple $p_l(m, n)$ et $q_l(m, n)$ se réduise à *l'unité*.

En effet, les éléments simples étant d'avance donnés sous la forme

$$(4)\qquad p_l(m, n) = \frac{p_l(m, n)}{\overline{p}_l(m, n)},$$

où $\overline{p}_l(m, n)$ désigne la valeur particulière obtenue par $p_l(m, n)$, quand la fonction f s'évanouit, on aura pour $f = 0$

$$p_l(m, n) = 1.$$

et par conséquent (³)

$$(5)\qquad p_2(2m) = p_l(2m + 1).$$

Dans le cas qui nous occupe (rayon vecteur r d'un corps C par

(¹) *Sur une équation algébrique remarquable se trouvant en rapport à la mécanique céleste.* (*Astron. iakttt. och unders. Stockholms Observatorium*, Bd VII).

(²) *Integralentwickelungen des Dreikörperproblemes* (*Ibid.*, Bd IX, n° 2).

(³) Nous avons, en général,

$$p_l(i) = p_l(i, 0) + p_l(i - 1, 1) + p_l(i - 2, 2) + \ldots.$$

rapport au centre de gravité des deux autres corps A, B), la répartition des signes n'est plus si uniforme. Alors il n'est pas *a priori* nécessaire de supposer

$$r = 0,$$

pour les valeurs des arguments

$$u = ia_1, \qquad v = ib_1,$$

qui sont considérées comme les modules d'excentricité, et en réalité cette condition n'est pas remplie.

Pour les développements des fonctions particulières

$$\varepsilon_1(u, v), \quad \varepsilon_2(u, v),$$

la condition analogue s'est trouvée bien remplie et, pour ces développements, nous avons partout à appliquer la suite

$$\left| \begin{matrix} + \\ - \\ + \\ - \end{matrix} \right|$$

à tous les complexes y appartenant. Mais déjà pour la fonction

$$\eta(u, v),$$

nous nous trouverons devant deux suites des signes appartenant aux complexes employés, savoir :

$$(6) \qquad \left| \begin{matrix} + \\ - \\ + \\ - \end{matrix} \right| \quad \text{et} \quad \left| \begin{matrix} + \\ + \\ + \\ + \end{matrix} \right|,$$

et pour la fonction

$$\Theta(u_1, v_1),$$

nous avons à considérer, outre les suites (6), encore d'autres suites qui en général se composent des suites que voici :

	a.	*b.*	*c.*
(7)	+ +	+ + + +	+ +
	— —	+ + — —	+ +
	+ —	+ — + —	+ —
	— +	— + + —	+ —
	Combinaisons évanouissantes.	Combinaisons demi-évanouissantes.	Combinaisons non évanouissantes.

Or, plusieurs des termes de nos développements acquièrent le coefficient zéro, et il est bien possible de s'en rendre compte par des combinaisons des suites (7). Mais comme par cela les séries viendraient se compliquer, il paraît plus convenable de considérer le zéro comme un signe particulier, en considérant des suites correspondantes, par exemple :

$$\begin{array}{cccc} + & + & + & 0, \\ 0 & + & - & 0, \\ - & - & 0 & +, \\ 0 & 0 & + & 0. \end{array}$$

La suite des signes appartenant à un certain développement $f(u, v)$ peut ainsi être comprise, par exemple, par la formule

$$(8) \qquad f(+-0) = \begin{vmatrix} + \\ - \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} + \\ - \\ + \\ - \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} + \\ 0 \\ - \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} + \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + \ldots.$$

2. Passons, après ces remarques préliminaires, à l'exposé des suites de signes appartenant aux fonctions individuelles employées pour la représentation du mouvement dans le cas du problème des trois corps qui nous occupe [1].

1. *Développement de* ε_1 *et* ε_2. — Ces développements ont la forme

$$(9) \qquad \begin{cases} \varepsilon_1 = \varkappa \dfrac{\chi}{c}\left(Q_0 + \dfrac{c}{e} Q_1 + \dfrac{c^2}{e^2} Q_2 + \ldots\right) + \varepsilon_0, \\ \varepsilon_2 = \varkappa \dfrac{\chi}{c}\left(Q_0 - \dfrac{c}{e} Q_1 + \dfrac{c^2}{e^2} Q_2 - \ldots\right) + \varepsilon_0. \end{cases}$$

Les fonctions Q_2 ont ici la forme la plus simple. Voici les signes et les

---

[1] Ces résultats sont obtenus par l'analyse et la généralisation des développements directement trouvés. Voir : *Sur le développement des intégrales du problème des trois corps*. Première Partie (*Journal des Mathématiques pures et appliquées*, 7e série, t. I, fasc. 4, 1915).

fonctions élémentaires y appartenant :

			Fonctions élémentaires.
(Q)	$Q_0 = 1$	$+$	$q_0(0)$
		$-$	$q_0(1)$
	$Q_1 = 1$	$+$	$q_1(0)$
		$-$	$q_1(1)$
		$+$	$q_1(2)$
		$-$	$q_1(3)$
	$Q_2 = 1$	$+$	$q_2(2)$
		$-$	$q_2(3)$
		$+$	$q_2(4)$
		$-$	$q_2(5)$
	$Q_3 = 1$	$+$	$q_3(4)$
		$-$	$q_3(5)$
		$+$	$q_3(6)$
		$-$	$q_3(7)$
	.....		.....

D'après cet aperçu, il vient :

$$\begin{aligned}
Q_0 &= +q_0(0),\\
&\quad -q_0(1),\\
Q_1 &= +q_1(0),\\
&\quad -q_1(1),\\
&\quad +q_1(2),\\
&\quad -q_1(3),\\
Q_2 &= +q_2(2),\\
&\quad -q_2(3),\\
&\quad +q_2(4),\\
&\quad -q_2(5),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Les signes sont partout alternatifs, c'est-à-dire

$$\left|\begin{matrix} + \\ - \\ + \\ - \end{matrix}\right|$$

pour tous les complexes Q_m. Les développements de ε_1 et ε_2 sont ainsi rigoureusement *autologues*.

La partie libre qu'il faut ajouter aux expressions soit de ε_1, soit de ε_2, se trouve donnée par

$$(9a) \qquad \varepsilon_0 = \varkappa \frac{e}{c}(1-c)\frac{\sin u + \sin v}{\alpha \operatorname{ch} a_1 + \beta \operatorname{ch} b_1}.$$

2. *Développement de* $\eta(u, v)$. — Ce développement acquiert la forme symétrique :

$$(10) \qquad \begin{aligned} \eta = & \frac{1+c}{2}\,\frac{1+z_1}{2}\,\eta_1(u, v)_1, \\ & - \frac{1+c}{2}\,\frac{1-z_1}{2}\,\eta_1(u, v)_2, \\ & - \frac{1-c}{2}\,\frac{1+z_1}{2}\,\eta_2(u, v)_2, \\ & + \frac{1-c}{2}\,\frac{1-z_1}{2}\,\eta_2(u, v)_1, \end{aligned}$$

et il se compose des quatres séries particulières ci-après :

$$(10a) \qquad \left\{ \begin{aligned} \eta_1(u, v)_1 &= \varkappa \frac{e}{c}\left(P_0 - \frac{c}{e}P_1 - \frac{c^2}{e^2}P_2 + \frac{c^3}{e^3}P_3 + \ldots\right), \\ \eta_1(u, v)_2 &= \varkappa \frac{e}{c}\left(P_0 + \frac{c}{e}P_1 - \frac{c^2}{e^2}P_2 - \frac{c^3}{e^3}P_3 + \ldots\right), \\ \eta_2(u, v)_2 &= \varkappa \frac{e}{c}\left(P'_0 + \frac{c}{e}P'_1 + \frac{c^2}{e^2}P'_2 + \frac{c^3}{e^3}P'_3 + \ldots\right), \\ \eta_2(u, v)_1 &= \varkappa \frac{e}{c}\left(P'_0 - \frac{c}{e}P'_1 + \frac{c^2}{e^2}P'_2 - \frac{c^3}{e^3}P'_3 + \ldots\right), \end{aligned} \right.$$

dont les signes se reproduisent sur les quatre suites horizontales :

$$\begin{aligned} &\eta_1(u, v)_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots && + - - + \\ &\eta_1(u, v)_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots && + + - - \\ &\eta_2(u, v)_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots && + + + + \\ &\eta_2(u, v)_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots && + - + - \end{aligned}$$

Quant aux signes enfermés dans les complexes P et P′, nous aurons les expressions finies :

				Fonctions élémentaires.
$P_0 = 1$	$+$	$P'_0 = 1$	$+$	$p_0(0)$
	$-$		$+$	$p_0(1)$
$P_1 = 1$	$+$	$P'_1 = 1$	$+$	$p_1(0)$
	$-$		$+$	$p_1(1)$
	$+$		$+$	$p_1(2)$
	$-$		$+$	$p_1(3)$
$P_2 = 1$	$+$	$P'_2 = 1$	$+$	$p_2(2)$
	$-$		$+$	$p_2(3)$
	$+$		$+$	$p_2(4)$
	$-$		$+$	$p_2(5)$
$P_3 = 1$	$+$	$P'_3 = 1$	$+$	$p_3(4)$
	$-$		$+$	$p_3(5)$
	$+$		$+$	$p_3(6)$
	$-$		$+$	$p_3(7)$
.....		.....		.....

Tandis que les P contiennent des signes alternatifs, nous voyons que dans les P′ on a partout le signe $+$. Ainsi les fonctions $\eta_1(u, v)_1$ et $\eta_1(u, v)_2$ s'évanouissent pour $u = ia_1$, $v = ib_1$, mais cela n'est plus le cas pour les deux autres fonctions

$$\eta_2(u, v)_1 \quad \text{et} \quad \eta_2(u, v)_2.$$

Par conséquent la fonction $\eta(u, v)$ s'évanouit en partie, en contenant d'autre part une partie non évanouissante.

La partie libre qu'il faut ajouter au développement cité de $\eta(u, v)$ est de la forme

$$(10\,b) \qquad \eta_0 = -z^2(1+c)\,\frac{\cos u - \cos v}{\operatorname{ch} a_1 - \operatorname{ch} b_1}.$$

3. *Développement de* $\Theta(u_1, v_1)$. — Ce développement a la forme d'une série à double entrée, à laquelle nous pouvons assigner, d'après une détermination nouvelle, la forme systématique

$$(11) \quad \Theta = -\frac{zz_1}{c-1}\Bigg\{\left[P_0 + 4c\frac{e}{c}P_1 + (4c)^2\left(\frac{e}{c}\right)^2 P_2\right]$$
$$+ \left[\frac{c(c+1)}{c(c-1)}\right]^3\left[(4c)^3\left(\frac{e}{c}\right)^3 P_3 + (4c)^4\left(\frac{e}{c}\right)^4 P_4 + (4c)^5\left(\frac{e}{c}\right)^5 P_5\right]$$
$$+ \left[\frac{c(c+1)}{c(c-1)}\right]^6\left[(4c)^6\left(\frac{e}{c}\right)^6 P_6 + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\right]$$
$$+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\Bigg\}.$$

L'expression comprend ainsi une suite infinie dont les termes individuels viennent s'ordonner à trois. C'est un arrangement en quelque sorte analogue aux expressions posées ci-après de π_1 et π_2, où il y a, outre le développement suivant

$$\left(\frac{e}{c}\right)^n,$$

d'autres développements suivant les puissances de

$$[c(c+1)]^3 \quad \text{et} \quad [c(c-1)]^3.$$

Les fonctions π et θ se correspondent ainsi l'une à l'autre. D'autre part, la fonction $\eta(u, v)$ correspond à la paire de fonctions ε_1 et ε_2.

Voici les signes appartenant à cette expression (¹) :

				Fonctions élémentaires
$P_0 = -c$	o	$+1$	o	$p_0(0)$
	—		—	$p_0(1)$
	o		o	»
	—		+	»
$P_1 = -c$	+	$+z$	+	$p_1(0)$
	o		o	$p_1(1)$
	—		+	$p_1(2)$
	o		o	$p_1(3)$
$P_2 = -c$	+	$+1$	—	$p_2(2)$
	—		—	$p_2(3)$
	—		—	$p_2(4)$
	+		—	$p_2(5)$
$P_3 = -c$	o	$+z$	o ★	$p_3(4)$
	—		— ★	$p_3(5)$
	o		o ★	$p_3(6)$
	+ ★		— ★	$p_3(7)$
$P_4 = -c$	+	$+1$	+	$p_4(6)$
	o		o	$p_4(7)$
	—		+	$p_4(8)$
	o		o	$p_4(9)$
$P_5 = -c$	+	$+z$	—	$p_5(8)$
			—	$p_5(9)$
	—		—	$p_5(10)$
	+		—	$p_5(11)$
.....				.....

(¹) Nous avons désigné par un astérisque (*) les signes hypothétiques qui appartiennent à des termes presque insensibles.

Nous pouvons nous imaginer les signes de ces fonctions composés d'après l'aperçu suivant

$$-c\left|\begin{array}{c|c} + & 0 \\ - & 1 \\ - & 0 \\ + & 1 \end{array}\right| \qquad -1\left|\begin{array}{c|c} + & 0 \\ + & 1 \\ + & 0 \\ + & 0 \end{array}\right|$$

$$-c\left|\begin{array}{c|c} + & 1 \\ - & 0 \\ - & 1 \\ + & 0 \end{array}\right| \qquad +\varkappa\left|\begin{array}{c|c} + & 1 \\ + & 0 \\ + & 1 \\ + & 0 \end{array}\right|$$

$$-c\left|\begin{array}{c|c} + & 1 \\ - & 1 \\ - & 1 \\ + & 1 \end{array}\right| \qquad -1\left|\begin{array}{c|c} + & 1 \\ + & 1 \\ + & 1 \\ + & 1 \end{array}\right|$$

d'où leur loi est bien évidente.

Le terme libre est

$$\theta_0 = \varkappa^2(c+1)\frac{c}{e}\,\frac{\cos u_1 - \cos v_1}{\operatorname{ch} a_1 - \operatorname{ch} b_1}. \tag{11a}$$

La suite des coefficients

$$\begin{array}{ll} -c & +1, \\ -c & +\varkappa, \\ -c & +1, \\ -c & +\varkappa, \\ \ldots & \ldots\ldots \end{array}$$

parcourt constamment les expressions. Les signes se reproduisent *à trois* dans le sens vertical. On a supposé que les $P_3, P_4, \ldots, P_6, P_7, \ldots$, à partir de la deuxième ligne de la formule Θ, sont les mêmes quantités qui entrent dans la première ligne de cette expression.

4. *Développement de* $\pi(u_1, v_1)$. — Cette fonction représentant *le périhélie* des arguments u, v comporte une plus grande diversité de signes que les autres fonctions employées, ce qui tient sans doute à la circonstance que la fonction $\pi(u_1, v_1)$ correspond seule aux deux fonctions équivalentes $\varepsilon_1(u, v)$ et $\varepsilon_2(u, v)$, qui représentent les *longitudes d'époque* de chacun des arguments u, v. Néanmoins la répartition des signes s'est trouvée facilement sous la forme ci-après.

Nous avons à considérer la fonction π composée de deux parties :

$$\pi = \pi_1 + \pi_2,$$

où nous aurons, d'une part,

$$(12)\quad \pi_1 = \varkappa \frac{c}{e}\Big\{ Q_0 + \frac{e}{c} Q_1 + \frac{e^2}{c^2} Q_2 + \frac{e^3}{c^3} Q_3 + \ldots [c(c+1)]^3 \left[\frac{e^3}{c^3} Q_3^3 + \frac{e^4}{c^4} Q_4^3 + \ldots \right]$$
$$+ [c(c+1)]^6 \left[\frac{e^6}{c^6} Q_6^6 + \ldots\ldots\ldots \right]$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Big\}$$

et, d'autre part,

$$\pi_2 = \varkappa \frac{c}{e}\Big\{ Q'_0 + \frac{e}{c} Q'_1 + \frac{e^2}{c^2} Q'_2 + \frac{e^3}{c^3} Q'_3 + \ldots - c^3(c-1)^3 \left[\frac{e^3}{c^3} Q_3^{3\prime} + \frac{e^4}{c^4} Q_4^{3\prime} + \ldots \right]$$
$$+ c^6(c-1)^6 \left[\frac{e^6}{c^6} Q_6^{6\prime} + \ldots\ldots\ldots \right]$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Big\},$$

formules où la répartition des signes sera :

									Fonctions élémentaires.
$Q_0 =$	$+\frac{c-2}{2}$	$\begin{matrix} 0 \\ - \end{matrix}$	$+\frac{c-2}{2}$	$\begin{matrix} 0 \\ - \end{matrix}$	$Q'_0 =$	$+\frac{1}{2}$	$\begin{matrix} 0 \\ - \end{matrix}$	$+\frac{1}{2}$	$\begin{matrix} 0 \\ - \end{matrix}$	$q_0(0)$ $q_0(1)$
	$+\frac{c}{2}$	$\begin{matrix} - \\ 0 \end{matrix}$	$-\frac{c}{2}$	$\begin{matrix} - \\ 0 \end{matrix}$		$+\frac{1}{2}$	$\begin{matrix} - \\ 0 \end{matrix}$	$-\frac{1}{2}$	$\begin{matrix} - \\ 0 \end{matrix}$	»
	$+\frac{c+2}{2}$	$\begin{matrix} 0 \\ - \end{matrix}$	$+\frac{c+2}{2}$	$\begin{matrix} 0 \\ - \end{matrix}$		$+\frac{1}{2}$	$\begin{matrix} 0 \\ - \end{matrix}$	$+\frac{1}{2}$	$\begin{matrix} 0 \\ - \end{matrix}$	»
$Q_1 =$	$+\frac{c}{2}$	$\begin{matrix} + \\ 0 \\ + \\ 0 \end{matrix}$	$+\frac{c}{2}$	$\begin{matrix} + \\ 0 \\ + \\ 0 \end{matrix}$	$Q'_1 =$	$+\frac{1}{2}$	$\begin{matrix} + \\ 0 \\ + \\ 0 \end{matrix}$	$+\frac{1}{2}$	$\begin{matrix} + \\ 0 \\ + \\ 0 \end{matrix}$	$q_1(0)$ $q_1(1)$ $q_1(2)$ $q_1(3)$
	$+\frac{c-2}{2}$	$\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ - \\ + \end{matrix}$	$+\frac{c-2}{2}$	$\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ - \\ + \end{matrix}$		$+\frac{1}{2}$	$\begin{matrix} 0 \\ - \\ 0 \\ + \end{matrix}$	$+\frac{1}{2}$	$\begin{matrix} 0 \\ - \\ 0 \\ + \end{matrix}$	»
	$+\frac{c}{2}$	$\begin{matrix} + \\ 0 \\ + \\ 0 \end{matrix}$	$+\frac{c}{2}$	$\begin{matrix} + \\ 0 \\ + \\ 0 \end{matrix}$		$+\frac{1}{2}$	$\begin{matrix} + \\ 0 \\ + \\ 0 \end{matrix}$	$+\frac{1}{2}$	$\begin{matrix} + \\ 0 \\ + \\ 0 \end{matrix}$	»

									Fonctions élémentaires.
$Q_2 = +$	$\frac{c+2}{2}$	$\begin{vmatrix} 0 \\ - \\ 0 \\ - \end{vmatrix}$	$+ \frac{c+2}{2}$	$\begin{vmatrix} 0 \\ - \\ 0 \\ - \end{vmatrix}$	$Q'_2 = +$	$\frac{1}{2}$	$\begin{vmatrix} 0 \\ - \\ 0 \\ - \end{vmatrix}$	$+ \frac{1}{2}$	$\begin{vmatrix} 0 \\ - \\ 0 \\ - \end{vmatrix}$	$q_2(2)$ $q_2(3)$ $q_2(4)$ $q_2(5)$
$+$	$\frac{c}{2}$	$\begin{vmatrix} - \\ 0 \\ - \\ 0 \end{vmatrix}$	$+ \frac{c}{2}$	$\begin{vmatrix} - \\ 0 \\ - \\ 0 \end{vmatrix}$	$+$	$\frac{1}{2}$	$\begin{vmatrix} - \\ 0 \\ - \\ 0 \end{vmatrix}$	$+ \frac{1}{2}$	$\begin{vmatrix} - \\ 0 \\ - \\ 0 \end{vmatrix}$	»
$+$	$\frac{c-2}{2}$	$\begin{vmatrix} 0 \\ - \\ 0 \\ - \end{vmatrix}$	$+ \frac{c-2}{2}$	$\begin{vmatrix} 0 \\ - \\ 0 \\ - \end{vmatrix}$	$+$	$\frac{1}{2}$	$\begin{vmatrix} 0 \\ - \\ 0 \\ - \end{vmatrix}$	$+ \frac{1}{2}$	$\begin{vmatrix} 0 \\ - \\ 0 \\ - \end{vmatrix}$	»
$Q_3 = +$	$\frac{c}{2}$	$\begin{vmatrix} + \\ 0 \\ + \\ 0 \end{vmatrix}$	$+ \frac{c}{2}$	$\begin{vmatrix} + \\ 0 \\ + \\ 0 \end{vmatrix}$	$Q'_3 = +$	$\frac{1}{2}$	$\begin{vmatrix} + \\ 0 \\ + \\ 0 \end{vmatrix}$	$+ \frac{1}{2}$	$\begin{vmatrix} + \\ 0 \\ + \\ 0 \end{vmatrix}$	$q_3(4)$ $q_3(5)$ $q_3(6)$ $q_3(7)$
$+$	$\frac{c+2}{2}$	$\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ - \\ + \end{vmatrix}$	$- \frac{c+2}{2}$	$\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ - \\ + \end{vmatrix}$	$+$	$\frac{1}{2}$	$\begin{vmatrix} 0 \\ - \\ 0 \\ + \end{vmatrix}$	$+ \frac{1}{2}$	$\begin{vmatrix} 0 \\ - \\ 0 \\ + \end{vmatrix}$	»
$+$	$\frac{c}{2}$	$\begin{vmatrix} + \\ 0 \\ + \\ 0 \end{vmatrix}$	$+ \frac{c}{2}$	$\begin{vmatrix} + \\ 0 \\ + \\ 0 \end{vmatrix}$	$+$	$\frac{1}{2}$	$\begin{vmatrix} + \\ 0 \\ + \\ 0 \end{vmatrix}$	$+ \frac{1}{2}$	$\begin{vmatrix} + \\ 0 \\ + \\ 0 \end{vmatrix}$	»
.....					.....					

Il faut remarquer que les constantes parcourent ces formules de la manière uniforme :

$$\frac{c-2}{2} \qquad \frac{c-2}{2} \qquad \frac{1}{2} \qquad \frac{1}{2}$$

$$\frac{c}{2} \qquad - \frac{c}{2} \qquad \frac{1}{2} \qquad - \frac{1}{2}$$

$$\frac{c+2}{2} \qquad + \frac{c+2}{2} \qquad \frac{1}{2} \qquad \frac{1}{2}$$

et

$$\begin{array}{cccc}
\frac{c}{2} & \frac{c}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\
\frac{c-2}{2} & \frac{c-2}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\
\frac{c}{2} & \frac{c}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\
\frac{c+2}{2} & \frac{c+2}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\
\frac{c}{2} & \frac{c}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\
\frac{c-2}{2} & \frac{c-2}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

Quant aux signes renfermés dans les complexes, nous les voyons se reproduire *alternativement* pour Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, ...

Il faut cependant encore distinguer les quantités

$$Q_3^3, \quad Q_4^3, \quad \ldots, \qquad Q_3^{3\prime}, \quad Q_4^{3\prime}, \quad \ldots$$

des quantités

$$Q_3, \quad Q_4, \quad \ldots, \qquad Q_3', \quad Q_4', \quad \ldots,$$

dans les expressions de π_1 et π_2 citées ci-dessus. Mais il faut au contraire supposer que, de même,

$$Q_6^6, \quad \ldots, \qquad Q_6^{6\prime}, \quad \ldots$$

soient identiques aux

$$Q_6, \quad \ldots, \qquad Q_6', \quad \ldots,$$

et ainsi de suite alternativement. Il suffira, par conséquent, de noter encore les expressions des signes qu'il faut appliquer aux fonctions Q^3 et $Q^{3\prime}$. Or, Q_3^3 se distingue de Q_3 seulement par un changement de signe dans le second groupe de la première et de la troisième ligne. Un changement analogue a lieu pour $Q_3^{3\prime}$ relativement à Q_3', comme

on le voit par l'aperçu suivant :

$$
\begin{array}{llll}
Q_3^3 = & +\dfrac{c}{2}\left|\begin{array}{c}+\\0\\+\\0\end{array}\right| & +\dfrac{c}{2}\left|\begin{array}{c}-!\\0\\+\\0\end{array}\right| & \\
 & +\dfrac{c-2}{2}\left|\begin{array}{c}0\\0\\-\\+\end{array}\right| & -\dfrac{c-2}{2}\left|\begin{array}{c}0\\0\\-\\+\end{array}\right| & \\
 & +\dfrac{c}{2}\left|\begin{array}{c}+\\0\\+\\0\end{array}\right| & +\dfrac{c}{2}\left|\begin{array}{c}-!\\0\\+\\0\end{array}\right| & \\
Q_4^3 = & \dfrac{c+2}{2}\left|\begin{array}{c}0\\-\\0\\-\end{array}\right| & +\dfrac{c+2}{2}\left|\begin{array}{c}0\\-\\0\\-\end{array}\right| & \\
 & +\dfrac{c}{2}\left|\begin{array}{c}-\\0\\-\\0\end{array}\right| & +\dfrac{c}{2}\left|\begin{array}{c}-\\0\\-\\0\end{array}\right| & \\
 & +\dfrac{c-2}{2}\left|\begin{array}{c}0\\-\\0\\-\end{array}\right| & +\dfrac{c-2}{2}\left|\begin{array}{c}0\\-\\0\\-\end{array}\right| & \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots
\end{array}
\qquad
\begin{array}{llll}
Q_3^{3\prime} = & \dfrac{1}{2}\left|\begin{array}{c}+\\0\\+\\0\end{array}\right| & +\dfrac{1}{2}\left|\begin{array}{c}+\\0\\-!\\0\end{array}\right| & q_3(4)\\
 & & & q_3(5)\\
 & & & q_3(6)\\
 & & & q_3(7)\\
 & -\dfrac{1}{2}\left|\begin{array}{c}0\\-\\0\\+\end{array}\right| & -\dfrac{1}{2}\left|\begin{array}{c}0\\-\\0\\+\end{array}\right| & \text{»}\\
 & +\dfrac{1}{2}\left|\begin{array}{c}+\\0\\+\\0\end{array}\right| & +\dfrac{1}{2}\left|\begin{array}{c}+\\0\\-!\\0\end{array}\right| & \text{»}\\
Q_4^3 = & \dfrac{1}{2}\left|\begin{array}{c}0\\-\\0\\-\end{array}\right| & +\dfrac{1}{2}\left|\begin{array}{c}0\\-\\0\\-\end{array}\right| & q_4(6)\\
 & & & q_4(7)\\
 & & & q_4(8)\\
 & & & q_4(9)\\
 & +\dfrac{1}{2}\left|\begin{array}{c}-\\0\\-\\0\end{array}\right| & +\dfrac{1}{2}\left|\begin{array}{c}-\\0\\-\\0\end{array}\right| & \text{»}\\
 & +\dfrac{1}{2}\left|\begin{array}{c}0\\-\\0\\-\end{array}\right| & +\dfrac{1}{2}\left|\begin{array}{c}0\\-\\0\\-\end{array}\right| & \text{»}\\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots
\end{array}
$$

Il faut supposer que les suites des signes vont se permuter alternativement, quand nous procédons par les fonctions Q_3^3, Q_4^3, ..., de cet aperçu nouveau. Pour les groupes y suivants de Q_6^6, ..., nous avons déjà remarqué qu'il faut supposer que les suites du premier aperçu vont reparaître, après quoi les changements des signes vont se produire alternativement.

Tout le système prend une forme plus simple dès qu'on fait résumer les formules exposées. Le terme libre s'évanouit, c'est-à-dire :

$$(12a) \qquad \pi_0 = 0.$$

5. *Modules d'excentricité particuliers de r et de x.* — Tous ces développements se déduisent presque immédiatement des formules de

la première partie (I) [1] de cet exposé. Au contraire les formules se rapportant à la coordonnée x ont été sujettes à des modifications plus essentielles sur lesquelles il faut insister de plus près. Néanmoins quelques résultats intéressants résultent déjà des altérations que nous venons de faire dans les formules citées ci-dessus. En particulier, la partie de l'expression libre de η, précédemment considérée

$$\eta_0 = -\alpha \frac{1+e}{e} \frac{1-e}{e} \frac{\cos u - \cos v}{\operatorname{ch} a_1 - \operatorname{ch} b_1}$$

ne se prête pas en qualité de terme libre à une détermination convenable du coefficient

$$[h] \tag{13}$$

du développement adjoint. C'est pourquoi on se trouve amené à assimiler ce terme plutôt aux expressions primaires de r et de x, par exemple :

$$r = A[1 + \alpha - e_1 \cos u - \mu_1 e_1 \cos v].$$

Dès lors les excentricités e_1 et $\mu_1 e_1$ vont prendre de nouvelles valeurs, que nous aurons à exprimer en fonctions de nouveaux *modules d'excentricité*. En posant par conséquent

$$\left\{ \begin{aligned} r &= A e^{(\Theta)} \quad [1 + \alpha_1 - e_1 \cos u - \mu_1 e_1 \cos v + \eta(u, v)], \\ x &= B e^{(\Theta - \Omega)} [1 + \beta_3 - e_3 \cos u - \mu_3 e_3 \cos v + \eta(u, v)], \end{aligned} \right. \tag{14}$$

où $\eta(u, v)$ désigne la fonction η modifiée par soustraction du terme libre considéré, et en supposant toujours

$$e_1 = \frac{1}{\operatorname{ch} a_1 + \mu_1 \operatorname{ch} b_1}, \qquad e_3 = \frac{1}{\operatorname{ch} a_3 + \mu_3 \operatorname{ch} b_3},$$

où a, b et a_3, b_3 sont des modules d'excentricité nouveaux, en fixant de plus les formules des *coefficients de phase*

$$\mu_1 = -1 + \frac{\operatorname{ch} a_1{}^1}{3}, \qquad \mu_3 = -1 + \frac{\operatorname{ch} a_3{}^1}{3}, \tag{15}$$

nous obtiendrons facilement, pour les modules d'excentricité, les relations suivantes :

---

[1] *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 7e série, t. I, fasc. 4, 1915, p. 367.

Pour r

$$(16)\quad \begin{cases} \operatorname{ch} a_1 + \operatorname{ch} b_1 = 2\left[2 + (\varkappa + \varkappa_1)^3\right]^{\frac{2}{3}}, \\ \dfrac{\sqrt{1 + \mu_1 + \frac{1}{2}\varkappa_1(\varkappa + \varkappa_1)^2}}{\operatorname{ch} a_1 + \mu_1 \operatorname{ch} b_1} = 1; \end{cases}$$

pour x

$$(17)\quad \begin{cases} \operatorname{ch} a_3 - \operatorname{ch} b_3 = -\mu^3 + \frac{1}{2}\varkappa, \\ \dfrac{1}{\operatorname{ch} a_3 + \mu_3 \operatorname{ch} b_3} = \operatorname{ch} b_3 + \mu_3^2. \end{cases}$$

Ces valeurs conduisent à des valeurs de r et de x identiques à celles obtenues selon les formules précédemment employées [I, (6), (7)]. C'est un effet important de cette transformation, à première vue insignifiante, d'avoir reçu des modules d'excentricité particuliers de r et de x, parce qu'il y a inconvénient d'exprimer, par exemple, par les mêmes modules, désignés dès lors par

$$(18)\qquad a_0, \quad b_0,$$

qui appartiennent aux *fonctions variantes* η, Θ, π, ..., tandis que x jouissait déjà d'autres modules a_2, b_2 et que, pour la vitesse des aires $\sqrt{G}$, nous obtiendrons des modules particuliers

$$a_4, \quad b_4.$$

6. *Coordonnée des* $\varkappa$. *Fonction* Ω. — Nous avions exprimé, dans la première partie, la coordonnée x en faisant usage de deux fonctions ω, Ω appliquées dans la formule de la manière suivante :

$$x = B\, e^{\Theta - \Omega}(1 + \beta_3 - e_3 \cos u - \mu_3 e_3 \cos v + \eta + \omega),$$

où Θ et η sont les mêmes fonctions variantes qui appartiennent à r. Mais une considération plus approfondie nous montre que nous devons supposer

$$\omega = 0$$

et que par suite c'est le système (14) plus simple qu'il faut adopter. Il faut dans ce but transporter tous les termes précédemment déduits

en ω à la fonction Ω, qui dès lors seule contiendra tous les termes auparavant répartis sur les deux fonctions ω, Ω. Je renvoie, pour les détails de cette opération, à un Mémoire particulier [1]. Ces transformations conduisent facilement à des expressions analogues à celle de la fonction $\eta(u, v)$, qui, en adoptant les constantes

$$(19)\qquad \left\{\begin{aligned} \lambda &= \frac{1+\varkappa_1}{2}\,\frac{1+c}{2},\\ \lambda' &= \frac{1-\varkappa_1}{2}\,\frac{1+c}{2},\\ \lambda'' &= \frac{1+\varkappa_1}{2}\,\frac{1-c}{2},\\ \lambda''' &= \frac{1-\varkappa_1}{2}\,\frac{1-c}{2},\end{aligned}\right.$$

s'écrit succinctement :

$$(20)\qquad \begin{aligned} \eta(uv) = \varkappa\frac{e}{c}\Big[\ & \lambda\left(+P_0 - \frac{c}{e}P_1 - \frac{c^2}{e^2}P_2 - \ldots\right)\\ & - \lambda'\left(+P_0 + \frac{c}{e}P_1 - \frac{c^2}{e^2}P_2 - \ldots\right)\\ & - \lambda''\left(+P'_0 + \frac{c}{e}P'_1 + \frac{c^2}{e^2}P'_2 - \ldots\right)\\ & + \lambda'''\left(+P'_0 - \frac{c}{e}P'_1 + \frac{c^2}{e^2}P'_2 - \ldots\right)\Big],\end{aligned}$$

avec le terme libre

$$\eta_0 = -\varkappa^2(1+c)\,p_0(10).$$

En effet, il suit de cette réduction que la fonction Ω se compose bien de deux parties Ω_1 et Ω_2, analogues l'une à l'autre, formées à l'aide de coefficients semblables à ceux de η [*voir* (19)] et d'une partie Ω_0 supplémentaire de forme différente. En posant ainsi

$$(21)\qquad \begin{aligned} \Omega = \Omega_1 + \Omega_2\\ + \Omega_0\end{aligned}$$

---

[1] *Sur le développement des intégrales du problème des trois corps*, quatrième Partie (*Archives de l'Académie des Sciences*, Bd X, n° 8, Stockholm, 1914).

les expressions suivantes de ces fonctions sont bien valides :

$$(22)\quad \Omega_1 = \varkappa c(c+1)\frac{e}{c}\Bigg]^2 \left[\begin{array}{l} +\lambda_{10}\,P_0 - \dfrac{\lambda_{11}}{c(c+1)}\,\dfrac{c}{e}\,P_1 - \dfrac{\lambda_{12}}{[c(c+1)]^2}\left(\dfrac{c}{e}\right)^2 P_2 + \ldots \\ +\lambda'_{10}\,P'_0 - \dfrac{\lambda'_{11}}{c(c+1)}\,\dfrac{c}{e}\,P'_1 - \dfrac{\lambda'_{12}}{[c(c+1)]^2}\left(\dfrac{c}{e}\right)^2 P'_2 + \ldots \\ -\lambda''_{10}\,P''_0 - \dfrac{\lambda''_{11}}{c(c+1)}\,\dfrac{c}{e}\,P''_1 + \dfrac{\lambda''_{12}}{[c(c+1)]^2}\left(\dfrac{c}{e}\right)^2 P''_2 + \ldots \\ -\lambda'''_{10}\,P'''_0 - \dfrac{\lambda'''_{11}}{c(c+1)}\,\dfrac{c}{e}\,P'''_1 + \dfrac{\lambda'''_{12}}{[c(c+1)]^2}\left(\dfrac{c}{e}\right)^2 P'''_2 + \ldots \end{array}\right].$$

Terme libre

$$\Omega_1^{(0)} = -\varkappa z_1\left[c(c+1)\frac{e}{c}\right]^2 (c-1)\,p_0(10),$$

les coefficients de cette formule étant déterminés par les relations suivantes [*voir* (19)]

$$\lambda_{10} = \lambda_{c-1,\,\varkappa_1} = \frac{1+\varkappa_1}{2}\,\frac{1+c-1}{2}, \qquad \lambda_{11} = \lambda_{c,\,\varkappa_1} = \frac{1+\varkappa_1}{2}\,\frac{1+c}{2},$$

$$\lambda'_{10} = \lambda'_{c-1,\,\varkappa_1} = \frac{1-\varkappa_1}{2}\,\frac{1+c-1}{2}, \qquad \lambda'_{11} = \lambda'_{c,\,\varkappa_1} = \frac{1-\varkappa_1}{2}\,\frac{1+c}{2},$$

$$\lambda''_{10} = \lambda''_{c-1,\,\varkappa_1} = \frac{1+\varkappa_1}{2}\,\frac{1-c+1}{2}, \qquad \lambda''_{11} = \lambda''_{c,\,\varkappa_1} = \frac{1+\varkappa_1}{2}\,\frac{1-c}{2},$$

$$\lambda'''_{10} = \lambda'''_{c-1,\,\varkappa_1} = \frac{1-\varkappa_1}{2}\,\frac{1-c+1}{2}; \qquad \lambda'''_{11} = \lambda'''_{c,\,\varkappa_1} = \frac{1-\varkappa_1}{2}\,\frac{1-c}{2};$$

$$\lambda_{12} = \lambda_{c+1,\,\varkappa_1} = \frac{1+\varkappa_1}{2}\,\frac{1+c+1}{2},$$

$$\lambda'_{12} = \lambda'_{c+1,\,\varkappa_1} = \frac{1-\varkappa_1}{2}\,\frac{1+c-1}{2},$$

$$\lambda''_{12} = \lambda''_{c+1,\,\varkappa_1} = \frac{1+\varkappa_1}{2}\,\frac{1-c-1}{2},$$

$$\lambda'''_{12} = \lambda'''_{c+1,\,\varkappa_1} = \frac{1-\varkappa_1}{2}\,\frac{1-c-1}{2}.$$

L'expression de la seconde fonction est la suivante :

$$(22\,a)\quad \Omega_2 = \varkappa\Big[c(c-1)\frac{e}{c}\Big]^2 \left[\begin{array}{l} -\lambda_{20}\,P_0 + \dfrac{\lambda_{21}}{c(c-1)}\,\dfrac{c}{e}\,P_1 + \dfrac{\lambda_{22}}{[c(c-1)]^2}\left(\dfrac{c}{e}\right)^2 P_2 - \ldots \\ +\lambda'_{20}\,P'_0 - \dfrac{\lambda'_{21}}{c(c-1)}\,\dfrac{c}{e}\,P'_1 - \dfrac{\lambda'_{22}}{[c(c-1)]^2}\left(\dfrac{c}{e}\right)^2 P'_2 + \ldots \\ -\lambda''_{20}\,P''_0 - \dfrac{\lambda''_{21}}{c(c-1)}\,\dfrac{c}{e}\,P''_1 + \dfrac{\lambda''_{22}}{[c(c-1)]^2}\left(\dfrac{c}{e}\right)^2 P''_2 + \ldots \\ +\lambda'''_{20}\,P'''_0 + \dfrac{\lambda'''_{21}}{c(c-1)}\,\dfrac{c}{e}\,P'''_1 - \dfrac{\lambda'''_{22}}{[c(c-1)]^2}\left(\dfrac{c}{e}\right)^2 P'''_2 - \ldots \end{array}\right].$$

Terme libre

$$\Omega_2^{(0)} = + \varkappa \left[c(c-1)\frac{e}{c} \right]^2 p_0(10),$$

où les valeurs des coefficients sont bien déterminées comme il suit :

$$\lambda_{20} = \lambda_{-c+1,\,\varkappa_1} = \frac{1+\varkappa_1}{2}\,\frac{1-c+1}{2}, \qquad \lambda_{21} = \lambda_{c,\,-\varkappa_1} = \frac{1-\varkappa_1}{2}\,\frac{1+c}{2},$$

$$\lambda'_{20} = \lambda'_{-c+1,\,\varkappa_1} = \frac{1+\varkappa_1}{2}\,\frac{1-c+1}{2}, \qquad \lambda'_{21} = \lambda'_{c,\,-\varkappa_1} = \frac{1+\varkappa_1}{2}\,\frac{1+c}{2},$$

$$\lambda''_{20} = \lambda''_{-c+1,\,\varkappa_1} = \frac{1+\varkappa_1}{2}\,\frac{1+c-1}{2}, \qquad \lambda''_{21} = \lambda''_{c,\,-\varkappa_1} = \frac{1-\varkappa_1}{2}\,\frac{1-c}{2},$$

$$\lambda'''_{20} = \lambda'''_{-c+1,\,\varkappa_1} = \frac{1-\varkappa_1}{2}\,\frac{1+c-1}{2}; \qquad \lambda'''_{21} = \lambda'''_{c,\,-\varkappa_1} = \frac{1+\varkappa_1}{2}\,\frac{1-c}{2};$$

$$\lambda_{22} = \lambda_{-c-1,\,\varkappa_1} = \frac{1+\varkappa_1}{2}\,\frac{1-c-1}{2},$$

$$\lambda'_{22} = \lambda'_{-c-1,\,\varkappa_1} = \frac{1-\varkappa_1}{2}\,\frac{1-c-1}{2},$$

$$\lambda''_{22} = \lambda''_{-c-1,\,\varkappa_1} = \frac{1+\varkappa_1}{2}\,\frac{1+c+1}{2},$$

$$\lambda'''_{22} = \lambda'''_{-c-1,\,\varkappa_1} = \frac{1-\varkappa_1}{2}\,\frac{1+c+1}{2}.$$

Les expressions de Ω_1 et Ω_2 procèdent ainsi suivant les puissances positives de

$$\frac{c}{e}$$

en abordant toutefois avec la puissance négative

$$\left(\frac{c}{e}\right)^{-2}.$$

La troisième de nos fonctions, Ω_0, se trouve donnée par l'expression encore plus simple [1]

$$(22\,b) \qquad \Omega_0 = -\varkappa \left[P'_0 + 4c\frac{e}{c}P'_1 + \left(4c\frac{e}{c}\right)^2 P'_2 + \ldots \right].$$

---

[1] Cette fonction Ω_0 correspond à la fonction $\chi(u, v)$ considérée dans le numéro suivant.

Terme libre

$$\Omega_0^{(0)} = + 2\varkappa^2 c\, p_0(10).$$

Dans toutes ces formules les fonctions élémentaires

$$\begin{array}{llll} P_0, & P'_0, & P''_0, & P'''_0; \\ P_1, & P'_1, & P''_1, & P'''_1; \\ P_2, & P'_2, & P''_2, & P'''_2; \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots. \end{array}$$

sont à former de la manière indiquée ci-après :

$$(23)\quad P = \left|\begin{array}{c} + \\ - \\ + \\ - \end{array}\right| \quad P' = \left|\begin{array}{c} + \\ + \\ + \\ + \end{array}\right| \quad P'' = \left|\begin{array}{c} + \\ - \\ - \\ + \end{array}\right| \quad P''' = \left|\begin{array}{c} + \\ + \\ - \\ - \end{array}\right| \quad \begin{array}{lll} \text{Facteurs respectivement.} & & \\ p_0(0); & p_1(0); & \ldots; \\ p_0(1); & p_1(1); & \ldots; \\ & p_1(2); & \ldots; \\ & p_1(3); & \ldots. \end{array}$$

7. *Fonction* $\chi(u, v)$. — En employant les développements du numéro précédent pour la fonction Ω, l'expression de x prend bien la forme

$$x = B\, e^{\Theta - \Omega}[1 + \beta_3 - e_3 \cos u - \mu_3 e_3 \cos v + \eta].$$

Pour avoir les coordonnées x_0, y_0 se rapportant à l'axe Tx_0, coïncidant avec le rayon vecteur r, nous aurons à appliquer la formule

$$(24)\qquad x = x_0 \cos(\pi + \chi) + y_0 \sin(\pi + \chi),$$

χ désignant la nouvelle fonction qui, ajoutée à la longitude du périhélie des arguments π, forme l'angle nommé *axiale*, ou bien

$$(25)\qquad \varphi = \pi + \chi.$$

Cette fonction χ, citée déjà dans la première Partie, ne se prête pas cependant, sous cette forme, directement à une détermination convenable des termes libres correspondants. C'est pourquoi il faut décomposer aussi cette fonction en deux parties en posant

$$(26)\qquad \chi = \chi_1 + \chi_2,$$

ce qui, en outre, se trouve déjà indiqué par l'expression mentionnée de cette fonction, ayant le facteur 2 en multiplicateur. Ainsi nous

aurons bien

$$(26\,a)\qquad \chi_1 = \varkappa\frac{c}{e}\left\{\left[+\mu_0 Q_0 + \mu_1 2c\frac{e}{c}Q_1 + \mu_2\left(2c\frac{e}{c}\right)^2 Q_2 - \ldots\right]\right.$$
$$\left[-\mu'_0 Q'_0 + \mu'_1 2c\frac{e}{c}Q'_1 + \mu'_2\left(2c\frac{e}{c}\right)^2 Q'_2 + \ldots\right]$$
$$\left[-\mu''_0 Q''_0 + \mu''_1 2c\frac{e}{c}Q''_1 + \mu''_2\left(2c\frac{e}{c}\right)^2 Q''_2 + \ldots\right]$$
$$\left.\left[+\mu'''_0 Q'''_0 + \mu'''_1 2c\frac{e}{c}Q'''_1 + \mu'''_2\left(2c\frac{e}{c}\right)^2 Q'''_2 - \ldots\right]\right\}.$$

Terme libre

$$\chi_1^{(0)} = -\varkappa\varkappa_1(c-1)\frac{c}{e}q_0(10),$$

et d'autre côté

$$(26\,b)\qquad \chi_2 = \varkappa\frac{c}{e}\left\{\left[-\mu_0 Q_0 + \mu_1 2c\frac{e}{c}Q_1 + \mu_2\left(2c\frac{e}{c}\right)^2 Q_2 - \ldots\right]\right.$$
$$\left[+\mu'_0 Q'_0 + \mu'_1 2c\frac{e}{c}Q'_1 + \mu'_2\left(2c\frac{e}{c}\right)^2 Q'_2 + \ldots\right]$$
$$\left[-\mu''_0 Q''_0 + \mu''_1 2c\frac{e}{c}Q''_1 + \mu''_2\left(2c\frac{e}{c}\right)^2 Q''_2 - \ldots\right]$$
$$\left.\left[+\mu'''_0 Q'''_0 + \mu'''_1 2c\frac{e}{c}Q'''_1 + \mu'''_2\left(2c\frac{e}{c}\right)^2 Q'''_2 + \ldots\right]\right\}.$$

Terme libre

$$\chi_2^{(0)} = -\varkappa\frac{c}{e}q_0(10),$$

les fonctions élémentaires Q_0, Q'_0, Q''_0, Q'''_0; Q_1, Q'_1, ... devront être formées à l'aide des éléments simples

$$q_l(m, n)$$

tout à fait de la même manière que P_0, P'_0, P''_0, ... viennent d'être déterminées en fonction des éléments simples

$$p_l(m, n)$$

[*voir* (23)], et les coefficients μ, μ', μ'', μ''' sont donnés en substituant e, $c-2$, c, $c+2$, ..., au lieu de c dans les expressions λ, λ', λ'', λ''' (19), page 188.

Constantes :

c.	$c = 0$.	c.	
$\mu_0 = \lambda$	$\mu_1 = \lambda''$	$\mu_2 = \lambda'''$	...
$\mu_0 = \lambda'$	$\mu'_1 = \lambda'''$	$\mu'_2 = \lambda'$	...
$\mu_0 = \lambda'''$	$\mu''_1 = \lambda'$	$\mu''_2 = \lambda$	...
$\mu''_0 = \lambda'$	$\mu'''_1 = \lambda$	$\mu'''_2 = \lambda''$	...

8. *Expression de $\varepsilon(u, v)$, variation des longitudes d'époque dans le cas de la coordonnée x.* — Ayant formé, dans ce qui précède, les fonctions Ω et χ, il nous reste à citer l'expression de la fonction ε qu'il faut appliquer dans les combinaisons

$$\varepsilon_1 + \varepsilon \quad \text{et} \quad \varepsilon_2 + \varepsilon,$$

aux longitudes d'époque ε_1, ε_2, pour avoir les variations des équations des arguments compatibles avec l'expression complète de x. En considérant quelques termes supplémentaires obtenus dans le cours de cette recherche, cette quantité s'est trouvée formée en analogie complète avec la fonction précédemment considérée π, c'est-à-dire la *longitude du périhélie des arguments*. Il paraît dès lors superflu de décomposer cette fonction en deux parties ε, ϖ, comme il y avait lieu de supposer dans la recherche préalable (I). Au contraire, cette fonction se trouve bien donnée par l'expression suivante régulière :

Coefficients de phase $\lambda = +1$; $\mu = -1$.

$$(27)\quad \varepsilon(uv) = \varkappa\frac{e}{c}\left[\begin{array}{cccccccc}
-\frac{c}{2}\left|\begin{matrix}0\\-\end{matrix}\right| & -\frac{c}{2}\left|\begin{matrix}0\\-\end{matrix}\right| & +\frac{1}{2}\left|\begin{matrix}0\\-\end{matrix}\right| & -\frac{1}{2}\left|\begin{matrix}0\\-\end{matrix}\right| & & & & \begin{matrix}q_0(0)\\q_0(1)\end{matrix}\\
-\frac{c-2}{2}\left|\begin{matrix}0\\0\\-\\-\end{matrix}\right| & -\frac{c-2}{2}\left|\begin{matrix}0\\0\\-\\-\end{matrix}\right| & -\frac{1}{2}\left|\begin{matrix}0\\-\\0\\-\end{matrix}\right| & +\frac{1}{2}\left|\begin{matrix}0\\-\\0\\-\end{matrix}\right| & & & & \begin{matrix}\left(\frac{c}{e}\right).q_1(0)\\ \text{»}\ q_1(1)\\ \text{»}\ q_1(2)\\ \text{»}\ q_1(3)\end{matrix}\\
+\frac{c}{2}\left|\begin{matrix}0\\-\\0\\-\end{matrix}\right| & +\frac{c}{2}\left|\begin{matrix}0\\-\\0\\-\end{matrix}\right| & -\frac{1}{2}\left|\begin{matrix}0\\-\\0\\-\end{matrix}\right| & +\frac{1}{2}\left|\begin{matrix}0\\-\\0\\-\end{matrix}\right| & & & & \begin{matrix}\left(\frac{c}{e}\right)^2.q_2(2)\\ \text{»}\ q_2(3)\\ \text{»}\ q_2(4)\\ \text{»}\ q_2(5)\end{matrix}
\end{array}\right]$$

Terme libre

$$-2\varkappa\varkappa_1 \frac{e}{c} q_0(10)_{\pm}.$$

9. *Expressions se rapportant à la vitesse des aires.* — Selon les formules de Jacobi, données dans son Mémoire : *Sur l'élimination des nœuds dans le problème des trois corps* (*Œuvres complètes*, t. IV, p. 302), nous trouverons sans difficulté, après avoir déterminé les demi-paramètres des orbites, d'après les formules

$$k\sqrt{G} = x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt},$$

$$k_1\sqrt{G_1} = x_1\frac{dy_1}{dt} - y_1\frac{dx_1}{dt},$$

les *inclinaisons* des deux orbites par rapport au plan invariable, par les égalités

$$4\mu\mu_1 kk_1\sqrt{GG_1}\sin^2\frac{1}{2}J = \left[\mu k\sqrt{G} + \mu_1 k_1\sqrt{G_1}\right]^2 - c_2^2,$$

$$c_2\sin i_1 = \mu k\sqrt{G}\sin J,$$

$$c_2\sin i = -\mu_1 k_1\sqrt{G_1}\sin J.$$

Il est par cela désirable de déterminer G et G_1 par une méthode indépendante. Nous nous sommes occupé de cette question dans un Mémoire particulier, déjà cité ([1]), auquel il suffira de renvoyer, pour les particularités y appartenant. Remarquons seulement que l'expression du demi-paramètre se trouve donnée par la relation

$$\sqrt{G} = \sqrt{G_0} + \Im(u, v), \tag{28}$$

sous la condition qu'on a soin d'introduire, dans les équations des arguments, les longitudes d'époques variées

$$\varepsilon_1 + \omega \quad \text{et} \quad \varepsilon_2 + \omega,$$

où $\Im(u, v)$ et $\omega(u, v)$ sont des développements autologues, bien

([1]) *Sur le développement des intégrales du problème des trois corps.* Quatrième Partie : *Expressions analytiques des intégrales* (*Archives de l'Académie des Sciences*, t. X, n° 8, Stockholm, 1914).

définis. L'expression principale du demi-paramètre est alors

$$(29)\qquad \sqrt{G_0} = C e^{\frac{1}{2}\Theta}\left(1 - \gamma_4 + \frac{\lambda_4 \cos u + \cos v}{\lambda_4 \operatorname{ch} a_4 + \operatorname{ch} b_4}\right),$$

les constantes de cette formule étant déterminées par les relations simples

$$(29\,a)\qquad \begin{cases} \operatorname{ch} a_4 = 10(\operatorname{ch} a_0 - \operatorname{ch} b_0), \\ \operatorname{ch} b_4 = \operatorname{ch} a_0, \end{cases}$$

ainsi que

$$(29\,b)\qquad \begin{cases} \lambda_4 = 2 - \alpha - \varkappa_1(\varkappa + \varkappa_1)^2, \\ \gamma_4 = 1 + \beta + (\varkappa + \varkappa_1)^3, \\ C = \sqrt{2A}\,[4c - \varkappa_1^2]. \end{cases}$$

A désignant le demi-grand axe de l'orbite et α et β n'étant pas autre chose que les *différentielles d'époque*, qui entrent déjà dans les équations des arguments et dans l'expression

$$e = \frac{1}{2}\,\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}$$

appartenant à tous nos développements dans les combinaisons

$$\frac{c}{e} \quad \text{ou} \quad \frac{e}{c}.$$

10. *Sur les cas de mouvement labile ou asymptotique.* — Nous avons fait remarquer (*Archives de l'Académie des Sciences*, t. IX, n° 23, p. 20-31) qu'il y a lieu de supposer les cas instables et asymptotiques caractérisés par le facteur

$$(30)\qquad e^{h^2\Delta^2},$$

appliqué dans les formules, où nous aurons

$$(30\,a)\qquad \Delta^2 = \tau^2[(180^\circ + u)^2 + (180^\circ + v)^2].$$

Remarquons que ce facteur ne peut pas être assimilé aux coefficients

$$[c(c+1)]^3, \quad [c(c-1)]^3,$$

parce qu'alors l'instabilité en question ne serait combinée, en π, qu'avec les hauts multiples des arguments, appartenant aux éléments

simples $p_3(4)$; $p_3(5)$; $p_3(6)$; $p_3(7)$. Le *facteur d'instabilité* paraît, au contraire, devoir être combiné avec les coefficients

$$2c \quad \text{et} \quad 4c$$

qui entrent dans les formules de

$$\chi, \quad \theta, \quad \Omega_0.$$

C'est ainsi seulement dans ces fonctions que le facteur d'instabilité entre directement. Mais il est de plus contenu, d'une manière secondaire, dans tous les autres développements par le facteur

$$\cos n\varphi$$

qu'il faut introduire en donnant à nos séries la forme générale

$$(31) \qquad \Sigma\, k_n \left(\frac{c}{e}\right)^{\pm n} P_n \cos n\varphi,$$

φ désignant *l'axiale* que nous venons de déterminer par la relation

$$\varphi = \pi + \chi.$$

Remarquons qu'il faut encore introduire le facteur

$$e^{h^2\Delta^2}$$

dans les autres quantités, fonctions de $2c$ et, par conséquent, remplacer

$$\begin{array}{ccc} 2c & \text{par} & 2c\, e^{h^2\Delta^2}, \\ \tau = 2c\nu_0 & \text{»} & \tau\, e^{h^2\Delta^2}, \\ \rho = 2c\tau & \text{»} & \rho\, e^{2h^2\Delta^2}. \end{array}$$

par où l'instabilité du mouvement devient sensible directement encore dans les équations des arguments.

Si nous avons

$$h^2 < 0,$$

le *cas asymptotique* se trouve, au contraire, réalisé. Le cas régulier serait

$$h^2 = 0,$$

c'est-à-dire sans *facteur asymptotique*. Mais il faut bien supposer que ce cas est seulement exceptionnel et qu'en général la solution soit ou instable, ou bien asymptotique.

Nous venons ainsi de rencontrer l'idée de Henri Poincaré sur les solutions asymptotiques, admirablement exposée dans son œuvre : *Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, et il paraît bien que cette forme de solution, considérée, au premier abord, par lui, appartient, d'une manière essentielle, au problème des trois corps.

A mesure que les valeurs de Δ^2 vont en croissant, les constantes ρ et τ vont décroître, pour h^2 négatif, à la valeur limite de zéro. C'est en particulier le cas pour la quantité τ, qui elle-même entre dans l'exposant du facteur asymptotique

$$e^{h^2\Delta^2}.$$

Ainsi l'état limite vient s'établir sur une échelle infiniment amoindrie, à mesure que les valeurs de t tendent à l'infini. Dans le cas d'instabilité, h^2 positif, il y a une altération de l'orbite de plus en plus brusque. Mais, avant que cette altération soit accomplie, les séries ont déjà cessé d'être convergentes.

II. *Aperçu des formules principales.* — Les quantités fondamentales sont les modules d'excentricité primaires

$$a_0, \quad b_0, \tag{32}$$

déterminés par les formules

$$\operatorname{ch} a_0 + \operatorname{ch} b_0 = 3,$$
$$\frac{\operatorname{ch} a_0 + \mu_0 \operatorname{ch} b_0}{(1+\mu_0)^2} = 10,$$
$$\mu_0 = -1 + \frac{\operatorname{ch}^{-1} a_0}{3},$$

donnant :

$$a_0 = 1,025\,296\,1, \qquad b_0 = 0,893\,746\,4,$$
$$\operatorname{ch} a_0 = 1,573\,305\,5, \qquad \operatorname{ch} b_0 = 1,426\,694\,5.$$

Pour le rayon vecteur r, la coordonnée x et le demi-paramètre G,

les formules sont

$$r = A\, e^{\Theta} \left[1 + \alpha_1 - \frac{\cos u + \mu_1 \cos v}{\operatorname{ch} a_1 + \mu_1 \operatorname{ch} b_1} + \eta(uv) \right],$$

$$x = A\, e^{\Theta - \Omega} \left[1 + \beta_3 - \frac{\cos u + \mu_3 \cos v}{\operatorname{ch} a_3 + \mu_3 \operatorname{ch} b_3} + \eta(uv) \right],$$

$$\sqrt{G} = C\, e^{\frac{1}{2}\Theta} \left(1 - \gamma_4 + \frac{\lambda_4 \cos u + \cos v}{\lambda_4 \operatorname{ch} a_4 + \operatorname{ch} b_4} \right) + \mathfrak{I}(uv);$$

les constantes particulières a_1, b_1; a_3, b_3; a_4, b_4 étant définies dans ce qui précède [(16), (17), (29 a)]. Remarquons, en particulier, les formules des coefficients de phase :

$$\mu_1 = -1 + \frac{\operatorname{ch} a_1^{-1}}{3}, \qquad \mu_3 = -1 + \frac{\operatorname{ch} a_3^{-1}}{3}, \qquad \lambda_4 = 2 - \alpha - \varkappa_1 (\varkappa + \varkappa_1)^2,$$

où

$$\varkappa = \frac{\pi}{180^\circ}, \qquad \varkappa_1 = -\varkappa \frac{1+e}{c} \frac{c}{e}.$$

Les fonctions Θ, η, Ω, ... sont celles définies dans ce qui précède.

Après avoir déduit les modules d'excentricité

$$a_2, \quad b_2,$$

originellement attribués à x, par les formules

$$b_2 = a_1,$$

$$\operatorname{ch} a_2 - \frac{1}{2} \operatorname{ch} b_2 = 1,$$

nous allons former les *différentielles d'époque* α, β d'après les relations

$$\alpha + \beta = 1 + \frac{\operatorname{ch} b_2^{-1}}{3},$$

$$\alpha - \beta = 1 + \frac{\operatorname{ch} a_2^{-1}}{2},$$

d'où nous déduisons immédiatement

$$e = \frac{1}{2} \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta},$$

la constante c étant, au contraire, un nombre d'avance déterminé,

savoir

$$c = 2,555\,555\,5\ldots.$$

Pour obtenir les arguments fondamentaux

$$u, \quad v,$$

nous avons bien les *équations des arguments* analogues à l'équation bien connue de Keppler. Ces équations sont :

$$(1+\nu_0)n_0 t - 180^\circ + \varepsilon_1 - \pi = u - \tau(180^\circ + u) - \frac{\sin u + \mu'_0 \sin v}{\alpha \operatorname{ch} a_0 + \beta\mu'_0 \operatorname{ch} b_0},$$

$$(1+\nu_0)n_0 t - 180^\circ + \varepsilon_2 - \pi = v - \tau(180^\circ + v) - \frac{\lambda''_0 \sin u + \sin v}{\alpha\lambda''_0 \operatorname{ch} a_0 + \beta \operatorname{ch} b_0}.$$

Les constantes adoptées dans ces formules sont

$$n_0 = 1^\circ,888\,888\,8\ldots, \qquad \nu_0 = \frac{\tau}{2c},$$

$$\tau = -\varkappa\frac{e^2}{c}, \qquad \rho = 2\left[c - \frac{\varkappa}{\varkappa + \varkappa_1}\right]\tau.$$

Les fonctions ε_1, ε_2, π sont celles déterminées dans ce qui précède. Remarquons seulement que

$$\pi = \pi(u_1 v_1),$$
$$\theta = \pi(u_1 v_1),$$

où les arguments u_1, v_1, renfermant le mouvement périodique particulier du périhélie, sont bien déterminés par les formules

$$u_1 = u + \rho(180^\circ + u),$$
$$v_1 = v + \rho(180^\circ + v).$$

Les *coefficients de phase*, pour ces équations des arguments, sont bien définis par les relations simples

$$\mu'_0 = 1 - \frac{\operatorname{ch} a_0^{-1}}{2},$$

$$\lambda''_0 = 2 + \frac{\operatorname{ch} b_0^{-1}}{3}.$$

En ce qui concerne l'expression de x et l'expression de $\sqrt{G}$, les équations des arguments doivent, comme nous l'avons remarqué, être

modifiées, en remplaçant

$$\begin{matrix}\varepsilon_1 \\ \varepsilon_2\end{matrix} \quad \text{par} \quad \begin{matrix}\varepsilon_1 + \varepsilon \\ \varepsilon_2 + \varepsilon\end{matrix} \quad \text{et par} \quad \begin{matrix}\varepsilon_2 + \omega \\ \varepsilon_1 + \omega\end{matrix}$$

respectivement.

Ces formules se trouvent, pour la pratique, bien appropriées au calcul de l'orbite. Elles ont sur les développements antérieurs, adoptés pour le problème dont il s'agit, l'avantage de permettre de calculer les termes jusqu'à une puissance quelconque de l'excentricité et de $\frac{c}{e}$. Dans le cas actuellement considéré, l'exactitude fut poussée à la douzième puissance de l'excentricité, ce qui a suffi pour atteindre un accord de 0,0001 entre l'orbite d'avance déterminée et les expressions analytiques.

Sur les courbes gauches algébriques;

PAR R. DE MONTESSUS DE BALLORE.

INTRODUCTION.

1. Soient deux équations

$$(1) \qquad \Sigma x^h y^k z^l = 0, \qquad \Sigma x^{h'} y^{k'} z^{l'} = 0,$$

représentant une courbe gauche algébrique Γ.

On peut éliminer, entre ces deux équations, d'abord toutes les puissances de z; puis toutes les puissances de z, sauf z lui-même; cela donne deux nouvelles équations

$$(2) \qquad \varphi(x, y) = 0, \qquad z\chi(x, y) - \psi(x, y) = 0,$$

qui représentent elles-mêmes, sauf quelques restrictions, la courbe Γ.

2. Considérons, par exemple, le système

$$(\Gamma) \qquad \begin{cases} a(x, y)z^2 + b(x, y)z + c(x, y) = 0, \\ a'(x, y)z^2 + b'(x, y)z + c'(x, y) = 0, \end{cases}$$

transformé en celui-ci

$$(\Gamma_1) \qquad \begin{cases} (ac' - ca')^2 + (ba' - ab')(bc' - cb') = 0, \\ z(ac' - ca') - (bc' - cb') = 0. \end{cases}$$

Quand les courbes planes (a, b, c) d'une part [a est pris pour $a(x, y) = 0$], (a', b', c') d'autre part, n'ont pas de points communs, les droites parallèles à Oz, définies par les équations

$$c(x, y) = 0, \qquad c'(x, y) = 0,$$

font partie de la ligne Γ_1, tandis que les seuls points

$$z = 0, \qquad c(x, y) = 0, \qquad c'(x, y) = 0$$

sont sur la courbe Γ.

3. Quoi qu'il puisse être, la comparaison entre les systèmes (1, 2) n'offre jamais de difficultés et l'on peut, sans restreindre en principe la généralité de la question, étudier les courbes gauches algébriques sur des équations de la forme (2), comme l'ont fait Cayley [1] et surtout Halphen [2].

4. Cayley a en effet indiqué la représentation (2) des courbes gauches algébriques; mais, malgré son talent d'analyste, il n'a pas réussi à surmonter les difficultés qui, de prime abord, se présentent.

Halphen, au contraire, a énoncé des résultats du plus haut intérêt : il a ouvert cette voie difficile.

Comme il est naturel dans une première étude, Halphen a limité son sujet : il ne s'est occupé que des courbes n'ayant pas de points à l'infini et dépourvues de points singuliers [3]; il a basé son grand Mémoire, qui ne comporte pas moins de 200 pages, sur la proposition suivante [4], à laquelle il reconnaît une extrême importance [5] : *Étant donnée une courbe gauche* Γ, *dépourvue de singularités, n'ayant pas de points à l'infini, et représentée par les équations*

$$\varphi(x, y) = 0, \qquad z\chi(x, y) - \psi(x, y) = 0,$$

pour qu'on puisse remplacer ce système par le suivant :

$$\varphi(x, y) = 0, \qquad z\chi_1(x, y) - \psi_1(x, y) = 0,$$

---

(1) Cayley, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LIV et LVIII.

(2) Halphen, *Classification des courbes gauches algébriques* (*Journal de l'École Polytechnique*, 1882). Consulter aussi : Castelnuovo, *Sui multipli di una serie lineare* (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. VIII), et E. Picard et G. Simart, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes*.

(3) Il s'agit ici des singularités vraies et non des singularités apparentes.

(4) et (5) Halphen, *loc. cit.*, p. 20, 25.

il faut et il suffit que le polynome $\chi_1(x, y)$ *s'évanouisse en chacun des points doubles de la courbe* φ.

5. On sait quel rôle considérable jouent les points singuliers, vrais et apparents, dans les courbes gauches algébriques. Il est même très remarquable que, dans ce difficile sujet, ce soient des formules analogues à celles que Plücker a données pour les courbes planes, qui aient constitué les premiers résultats généraux obtenus : je veux parler des formules de Cayley ([1]).

Je me propose, en premier lieu, *de montrer que l'étude des singularités des courbes planes* φ, ψ, χ *permet toujours, sauf dans des cas très particuliers et peu importants, de préciser la nature des singularités de la courbe gauche* Γ ([2]).

Dans une seconde partie, *je donne la proposition générale*, qui renferme celle d'Halphen n° 4, *concernant les conditions nécessaires et suffisantes que doivent remplir non seulement* χ_1, *mais encore* ψ_1, *pour qu'on puisse écrire*

$$\varphi(x, y) = 0, \qquad z\chi_1(x, y) - \psi_1(x, y) = 0,$$

au lieu de

$$\varphi(x, y) = 0, \qquad z\chi(x, y) - \psi(x, y) = 0,$$

cela que la courbe Γ *ait ou non des points à l'infini, ait ou non des singularités vraies* ([3]); je me borne cependant ici au cas où φ, ψ d'une part, φ, χ d'autre part, n'ont pas de contacts, mais ψ, χ peuvent en avoir.

Comme il paraît impossible de généraliser la démonstration, assez pénible, d'Halphen, non plus que certaines autres démonstrations de son théorème ([4]), j'emploie des procédés qui diffèrent de ceux-ci.

Les calculs nécessités par les questions traitées dans la deuxième Partie sont d'une nature très spéciale. Pour les élucider, il m'a paru nécessaire de donner quelques applications.

([1]) *Cf.* par exemple G. Salmon, *Traité de Géométrie analytique à trois dimensions*, 2e édition française, 2e Partie, p. 77.

([2]) R. de Montessus de Ballore, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 164, 1917, p. 392.

([3]) *Ibid.*, t. 164, 1917, p. 428.

([4]) Par exemple Picard, *Traité d'Analyse*, 2e édition, t. II, p. 572.

I. — ÉTUDE DES POINTS SINGULIERS DES COURBES ALGÉBRIQUES GAUCHES.

6. La première question qui se pose dans l'étude des courbes algébriques gauches Γ est celle des points singuliers, comme je l'ai dit.

Une parallèle à Oz, s'appuyant sur la courbe, peut passer par un point singulier de Γ; elle peut rencontrer Γ, non seulement en un point ordinaire, mais aussi en plusieurs points de cette espèce; elle peut encore rencontrer Γ à la fois en des points ordinaires et singuliers.

Dans le premier cas, *on dira* que Γ présente sur la parallèle à Oz une singularité *vraie;* ce sera un *nœud*, s'il s'agit d'un point double; cette singularité sera appelée *apparente* dans le second cas; on sait le rôle considérable que jouent les points doubles apparents; enfin, dans le dernier cas, la singularité sera *semi-apparente*.

Je vais montrer que *l'étude des singularités des courbes planes* φ, ψ, χ *permet toujours*, sauf dans quelques cas exceptionnels de peu d'intérêt auxquels il sera fait allusion au n° **7**, *de préciser la nature des singularités : vraies, apparentes, semi-apparentes de* Γ, et même d'étudier Γ au voisinage d'un point singulier vrai.

POINTS DE φ OU NE PASSENT NI ψ, NI χ.

7. En raison de la relation (2),

$$\varphi(x, y) = 0,$$

les seuls points du plan des xy à étudier sont ceux de la courbe φ.

Il est facile de préciser la valeur de z en un point ordinaire ou singulier de φ, où ne passent ni ψ, ni χ. *A un tel point* (a, b) *de* φ *correspond un point* (a, b, z) *de* Γ, *où* Γ *a une singularité analogue à celle que* φ *possède en* (a, b), *ou, au contraire est dépourvu de singularité, si* φ *n'a pas de singularité en* (a, b).

Il peut y avoir exception si Γ a en (a, b, z) un point singulier avec

plusieurs branches de courbe dont les tangentes soient dans un même plan vertical. Des exceptions analogues peuvent se présenter dans tous les cas dont je parlerai.

POINTS SIMPLES DE φ OU PASSE AU MOINS L'UNE DES COURBES ψ, χ.

8. *En un point simple de φ, où ψ a un point simple, mais où ne passe pas χ, z n'a que la valeur zéro; en un point simple de φ, où ψ ne passe pas, mais où passe χ, z n'a qu'une seule valeur, elle est infinie.* Cela est évident.

9. *En un point simple (a, b) de φ où ψ, χ ont l'une et l'autre un point simple, z n'a qu'une valeur, finie si ψ, χ ont un contact du même ordre; si ψ a un contact d'ordre $n-1$ avec φ, et si χ a un contact d'ordre $p-1$ avec φ, z est nul ou infini, selon que $n > p$ ou $n < p$.*

En effet, soit

$$(\varphi) \qquad y - b = \alpha_1(x-a) + \alpha_2(x-a)^2 + \alpha_3(x-a)^3 + \ldots$$

l'équation de la courbe φ [1].

Les équations de ψ, χ, qui passent en (a, b), sont de la forme

$$\begin{aligned} 0 = {} & \beta_{11}(x-a) + \beta_{12}(y-b) + \beta_{21}(x-a)^2 \\ & + \beta_{22}(x-a)(y-b) + \beta_{23}(y-b)^2 + \beta_{31}(x-a)^3 \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 = {} & \gamma_{11}(x-a) + \gamma_{12}(y-b) + \gamma_{21}(x-a)^2 \\ & + \gamma_{22}(x-a)(y-b) + \gamma_{23}(y-b)^2 + \gamma_{31}(x-a)^3 \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

mais, (x, y) étant constamment sur φ, pour les points (x, y) *consi-*

---

[1] On peut supposer, pour éviter l'apparence de cas particuliers dénués d'intérêt, que les axes Ox, Oy sont orientés de manière que les tangentes à φ en (a, b) ne soient jamais parallèles à Oy. En fait, cette restriction est inutile.

dérés, on doit écrire

$$(\psi)\quad 0 \neq \psi(x, y) = \beta_{11}(x-a) + \beta_{12}(y-b) + \beta_{21}(x-a)^2 + \beta_{22}(x-a)(y-b) + \beta_{23}(y-b)^2 + \beta_{31}(x-a)^3 + \ldots\ldots,$$

$$(\chi)\quad 0 \neq \chi(x, y) = \gamma_{11}(x-a) + \gamma_{12}(y-b) + \gamma_{21}(x-a)^2 + \gamma_{22}(x-a)(y-b) + \gamma_{23}(y-b)^2 + \gamma_{31}(x-a)^3 + \ldots\ldots,$$

relations qui, en tenant compte de (φ), prendront la forme

$$(3)\quad \psi(x, y) = (\beta_{11} + \beta_{12}\alpha_1)(x-a) + (\beta_{21} + \beta_{22}\alpha_1 + \beta_{12}\alpha_2 + \beta_{23}\alpha_1^2)(x-a)^2 + \ldots,$$

$$(4)\quad \chi(x, y) = (\gamma_{11} + \gamma_{12}\alpha_1)(x-a) + (\gamma_{21} + \gamma_{22}\alpha_1 + \gamma_{12}\alpha_2 + \gamma_{23}\alpha_1^2)(x-a)^2 + \ldots.$$

Les coefficients de quelques-unes des premières puissances de $(x-a)$ peuvent être nuls dans l'une ou l'autre de ces expressions. *Cela implique des contacts avec* φ.

1° Supposons en effet que

$$\beta_{11} + \beta_{12}\alpha_1 = 0 :$$

φ *et* ψ *sont alors tangentes en* (a, b), puisque α_1, coefficient angulaire de la tangente à φ en (a, b), vérifie l'équation

$$\beta_{11} + \beta_{12} y'_x = 0,$$

qui donne le coefficient angulaire de la tangente à ψ en (a, b).

2° *Supposons ensuite que*

$$(5)\qquad \beta_{11} + \beta_{12}\alpha_1 = 0, \qquad \beta_{21} + \beta_{22}\alpha_1 + \beta_{12}\alpha_2 + \beta_{23}\alpha_1^2 = 0;$$

quelle est la condition pour que φ, ψ *aient un contact du deuxième ordre?*

Rappelons en quelques mots la théorie des contacts.

Si

$$(6)\qquad x = f(t), \qquad y = \varphi(t)$$

sont les équations paramétriques d'une courbe φ; si

$$0 = F(x, y) = F[f(t), \varphi(t)] = \Phi(t)$$

est l'équation d'une courbe ψ, où l'on a remplacé (x, y) par leurs expressions (6), il y a contact du deuxième ordre en t_0 entre les deux courbes si

$$(7) \qquad \mathcal{F}(t_0) = 0, \qquad \mathcal{F}'(t_0) = 0, \qquad \mathcal{F}''(t_0) = 0.$$

Dans le cas présent,

$$x = t, \qquad t_0 = a$$

et (3)

$$\mathcal{F}(t) = (\beta_{11} + \beta_{12}\alpha_1)(t - a) + (\beta_{21} + \beta_{22}\alpha_1 + \beta_{12}\alpha_2 + \beta_{23}\alpha_1^2)(t - a)^2 + \ldots,$$

de telle sorte que les conditions (7) s'écrivent

$$\beta_{11} + \beta_{12}\alpha_1 = 0, \qquad \beta_{21} + \beta_{22}\alpha_1 + \beta_{12}\alpha_2 + \beta_{23}\alpha_1^2 = 0 :$$

ce sont les relations (5). Si les relations (5) sont vérifiées, φ, ψ ont donc un contact du deuxième ordre en (a, b).

3° Plus généralement, et de façon toute semblable, *si les coefficients de* $(x - a)$, $(x - a)^2$, ..., $(x - a)^{n-1}$ *de* ψ, *dans* (3), *sont nuls*, ψ *a un contact d'ordre* $(n - 1)$ *avec* φ, *en* (a, b).

Dans ce cas,

$$\frac{\psi(x, y)}{(x - a)^n} = \beta_{n,1} + \beta_{n,2}\alpha_1 + \ldots + (\beta_{n+1,1} + \ldots)(x - a) + \ldots$$

est fini en (a, b) puisque

$$\left[\frac{\psi(x, y)}{(x - a)^n}\right]_{\substack{x=a \\ y=b}} = \beta_{n,1} + \beta_{n,2}\alpha_1 + \ldots.$$

De même, *si les coefficients de* $(x - a)$, $(x - a)^2$, ..., $(x - a)^{p-1}$ *de* χ, *dans* (4), *sont nuls*, χ *a un contact d'ordre* $(p - 1)$ *avec* φ, en (a, b), et

$$\left[\frac{\chi(x, y)}{(x - a)^p}\right]_{a,b} = \gamma_{p,1} + \gamma_{p,2}\alpha_1 + \ldots$$

est fini.

On a écrit

$$\left[\frac{\varphi(x, y)}{(x - a)^p}\right]_{a,b} \quad \text{pour} \quad \left[\frac{\chi(x, y)}{(x - a)^p}\right]_{\substack{x=a \\ y=b}},$$

on a donc

$$\left[\frac{\psi(x,y)}{\chi(x,y)}\right]_{a,b} = \left[\frac{\psi(x,y):(x-a)^n}{\chi(x,y):(x-a)^p}\right]_{a,b}(x-a)^{n-p}_{x=a}$$
$$= \frac{\beta_{n,1}+\beta_{n,2}\alpha_1+\ldots}{\gamma_{p,1}+\gamma_{p,2}\alpha_1+\ldots}(x-a)^{n-p}_{x=a},$$

quantité *nulle*, *finie non nulle*, *ou infinie* selon que

$$n>p, \qquad n=p, \qquad n<p.$$

9. Passons au cas où ψ, χ ont des points multiples [1] en (a, b). Ici,

$$\begin{aligned}\psi(x,y) = {} & \beta_{h,1}\quad(x-a)^h+\beta_{h,2}\quad(x-a)^{h-1}(y-b)\\ & +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ & +\beta_{h,h+1}(y-b)^h+\beta_{h+1,1}(x-a)^{h+1}+\beta_{h+1,2}(x-a)^h(y-b)\\ & +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \chi(x,y) = {} & \gamma_{k,1}\quad(x-a)^k+\gamma_{k,2}\quad(x-a)^{k-1}(y-b)\\ & +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ & +\gamma_{k+1,1}(x-a)^{k+1}+\ldots,\end{aligned}$$

et cette question peut être traitée tout comme l'a été la précédente. *Si* $\psi(x,y)$ *n'a pas de contact en* (a, b) *avec* φ,

$$\left[\frac{\psi(x,y)}{(x-a)^h}\right]_{a,b}$$

n'est ni nul, ni infini. Si φ *et* ψ *ont un contact d'ordre* p,

$$\left[\frac{\psi(x,y)}{(x-a)^{h+p}}\right]_{a,b}$$

n'est ni nul, ni infini.

Ayant énoncé le résultat analogue qui concerne φ, il n'y aura aucune difficulté à reconnaître si $\frac{\psi(x,y)}{\chi(x,y)}$ est nul, fini non nul, ou infini en (a, b).

---

[1] Je dirai, pour simplifier le langage, que ψ a un point multiple d'ordre n en (a, b) si l'équation (ψ) de cette courbe (n° 8) débute par des termes de degré n,

$$\beta_{n,1}(x-a)^n+\beta_{n,2}(x-a)^{n-1}(y-b)+\ldots,$$

quelle que soit la nature de la singularité que présente ψ en (a, b).

10. En général, l'équation de φ n'est pas donnée sous la forme (φ) du n° **9**, mais sous celle-ci :

$$\varphi(x, y) = 0 = \alpha_{11}(x - a) + \alpha_{12}(y - b) + \alpha_{21}(x - a)^2 + \ldots.$$

Il est alors tout aussi facile, mais plus long, d'obtenir les résultats qui ont été énoncés.

Il serait peu utile, sauf en vue d'application à des courbes gauches Γ déterminées, de reprendre l'exposé avec cette dernière forme de φ. Au surplus, nous supposerons, dans ce qui suit, et précisément pour les applications qu'on voudrait faire de cette théorie, que φ est donnée sous cette forme implicite quand (a, b) en est un point double; on reviendra sans peine, si on le veut, de ce dernier cas, à celui où (a, b) est un point simple.

POINTS DOUBLES DE φ OU PASSE AU MOINS L'UNE DES COURBES ψ, χ.

11. Aux environs d'un point (a, b), *où les deux branches de φ ne sont pas tangentes entre elles*, nous pourrions écrire, selon la branche où se trouve (x, y),

$$y - b = \alpha_{11}(x - a) + \alpha_{21}(x - a)^2 + \alpha_{31}(x - a)^3 + \ldots,$$
$$y - b = \alpha_{12}(x - a) + \alpha_{22}(x - a)^2 + \alpha_{32}(x - a)^3 + \ldots,$$

et poursuivre l'étude comme dans le cas où φ a un point simple, en envisageant tour à tour les deux branches de φ; mais en vue des applications, comme il vient d'être dit, dans le but aussi d'éviter l'emploi des cycles, quand les deux branches de φ sont tangentes l'une à l'autre, nous prendrons φ sous la forme

$$(\varphi) \qquad \varphi(x, y) = 0 = \alpha_{21}(x - a)^2 + \alpha_{22}(x - a)(y - b) + \alpha_{23}(y - b)^2 + \alpha_{31}(x - a)^3 + \ldots.$$

Nous avons encore

$$(\psi) \qquad \psi(x, y) = \beta_{11}(x - a) + \beta_{12}(y - b) + \beta_{21}(x - a)^2 + \beta_{22}(x - a)(y - b) + \beta_{23}(y - b)^2 + \beta_{31}(x - a)^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(\chi) \qquad \chi(x, y) = \gamma_{11}(x - a) + \gamma_{12}(y - b) + \gamma_{21}(x - a)^2 + \gamma_{22}(x - a)(y - b) + \gamma_{23}(y - b)^2 + \gamma_{31}(x - a)^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

où les premiers coefficients $\beta_{11}, \beta_{12}, \ldots, \gamma_{11}, \gamma_{12}, \ldots$ peuvent être nuls.

12. On a

$$\frac{\psi(x, y)}{x-a} = \beta_{11} + \beta_{12}\frac{y-b}{x-a} + \beta_{21}(x-a) + \beta_{22}(y-b)$$
$$+ \beta_{23}(y-b)\frac{y-b}{x-a} + \beta_{31}(x-a)^2 + \ldots,$$

(x, y) étant, *il ne faut pas le perdre de vue*, un point de la courbe φ; puis

$$\left[\frac{\psi(x, y)}{x-a}\right]_{a,b} = \beta_{11} + \beta_{12}(y'_x)_{a,b},$$

où $(y'_x)_{a,b}$ est le coefficient angulaire de la tangente en (a, b) à la courbe φ. Ce coefficient angulaire a deux valeurs, puisque les deux branches de φ qui passent en (a, b) ont des tangentes distinctes.

Si

$$\beta_{11} + \beta_{12}(y'_x)_{a,b} \neq 0.$$

c'est-à-dire si (y'_x) ne vérifie pas l'équation

$$\beta_{11} + \beta_{12}u'_x = 0,$$

qui donne le coefficient angulaire de la tangente à ψ en (a, b) *la quantité* $\left[\frac{\psi(x, y)}{x-a}\right]_{a,b}$ *n'est pas nulle : ici, ψ n'est pas tangente à la branche de φ où se trouve (x, y).*

Au contraire, si

$$\beta_{11} + \beta_{12}(y'_x)_{a,b} = 0, \tag{8}$$

$\left[\frac{\psi(x, y)}{x-a}\right]_{a,b}$ *est nul, ψ est tangente en (a, b) à la branche de φ où se trouve (x, y).*

Étudions complètement, *dans ce cas*,

$$\frac{\psi(x, y)}{(x-a)^2} = \frac{\beta_{11}(x-a) + \beta_{12}(y-b)}{(x-a)^2}$$
$$+ \beta_{21} + \beta_{22}\frac{y-b}{x-a} + \beta_{23}\left(\frac{y-b}{x-a}\right)^2 + \beta_{31}(x-a) + \ldots;$$

montrons que

$$\left[\frac{\beta_{11}(x-a)+\beta_{12}(y-b)}{(x-a)^2}+\beta_{21}+\beta_{22}\frac{y-b}{x-a}+\beta_{23}\left(\frac{y-b}{x-a}\right)^2\right]_{a,b}$$

n'est pas nul si ψ *n'a qu'un contact du premier ordre en* (a, b) *avec la branche de* φ *où se trouve* ψ. En effet, *pour un point* (ξ, η) *de* ψ,

$$\begin{aligned}
0 = \psi(\xi, \eta) &= \beta_{11}(\xi-a)+\beta_{12}(\eta-b)+\beta_{21}(\xi-a)^2 \\
&\quad +\beta_{22}(\xi-a)(\eta-b)+\beta_{23}(\eta-b)^2+\beta_{31}(\xi-a)^3+\ldots, \\
0 = \frac{d\psi(\xi,\eta)}{d\xi} &= \beta_{11}+\beta_{12}\eta'_\xi+2\beta_{21}(\xi-a)+\beta_{22}[\eta+(\xi-a)\eta'_\xi] \\
&\quad +2\beta_{23}(\eta-b)\eta'_\xi+3\beta_{31}(\xi-a)^2+\ldots, \\
0 = \frac{d^2\psi(\xi,\eta)}{d\xi^2} &= \beta_{12}\eta''_{\xi^2}+2\beta_{21}+\beta_{22}[2\eta'+(\xi-a)\eta''_{\xi^2}] \\
&\quad +2\beta_{23}[(\eta-b)\eta''_{\xi^2}+\eta'^2_\xi]+6\beta_{31}(\xi-a)+\ldots,
\end{aligned}$$

$$(9)\qquad 0=\left(\frac{d^2\psi}{d\xi^2}\right)_{a,b}=\beta_{12}(\eta''_{\xi^2})_{a,b}+2\beta_{21}+2\beta_{22}(\eta'_\xi)_{a,b}+2\beta_{23}(\eta'^2_\xi)_{a,b}.$$

Si

$$(10)\qquad \left[\frac{\beta_{11}(x-a)+\beta_{12}(y-b)}{(x-a)^2}+\beta_{21}+\beta_{22}\frac{y-b}{x-a}+\beta_{23}\left(\frac{y-b}{x-a}\right)^2\right]_{a,b}=0,$$

il résulte de

$$\left[\frac{\beta_{11}(x-a)+\beta_{12}(y-b)}{(x-a)^2}\right]_{a,b}=\left[\frac{\beta_{11}+\beta_{12}y'_x}{2(x-a)}\right]_{a,b}=\frac{1}{2}\beta_{12}(y''_{x^2})_{a,b}$$

que

$$(11)\qquad \frac{1}{2}\beta_{12}y''_{b,a}+\beta_{21}y'_{a,b}+\beta_{23}y'^2_{a,b}=0;$$

l'identité (8) étant équivalente à

$$y'_{a,b}=\eta'_{a,b},$$

(9, 10, 11) entraînent

$$y''_{a,b}=\eta''_{a,b},$$

c'est-à-dire *supposent un contact du deuxième ordre*, au moins, *entre* ψ *et la branche de* φ *où se trouve* (x, y).

15. Soit maintenant

$$\beta_{11}=\beta_{12}=0.$$

On a, dans cette hypothèse,

$$(\psi)\qquad \psi(x, y) = \beta_{21}(x-a)^2 + \beta_{22}(x-a)(y-b) + \beta_{23}(y-b)^2 + \beta_{21}(x-a)^3 + \ldots,$$

et la courbe ψ a un point double en (a, b). Écrivons

$$\frac{\psi(x, y)}{(x-a)^2} = \beta_{21} + \beta_{22}\frac{y-b}{x-a} + \beta_{23}\left(\frac{y-b}{x-a}\right)^2 + \beta_{31}(x-a) + \ldots$$

$$\left[\frac{\psi(x, y)}{(x-a)^2}\right]_{a,b} = \beta_{21} + \beta_{22}y'_{a,b} + \beta_{23}y'^2_{a,b}.$$

où $y'_{a,b}$ est encore l'un des coefficients angulaires des deux tangentes à φ en (a, b).

Dans le cas actuel, $\left[\frac{\psi(x, y)}{(x-a)^2}\right]_{a,b}$ *est nul, ou ne l'est pas, selon que*

$$\beta_{21} + \beta_{22}y'_{a,b} + \beta_{23}y'^2_{a,b}$$

est lui-même nul ou ne l'est pas, selon que le coefficient angulaire $y'_{a,b}$ de la tangente en (a, b) à la branche de φ où se trouve (x, y) vérifie ou ne vérifie pas l'équation aux coefficients angulaires

$$\beta_{21} + \beta_{22}u'_y + \beta_{23}u'^2_y = 0$$

des tangentes à ψ, φ en (a, b), *selon enfin que l'une des deux branches de ψ a ou non un contact du premier ordre avec la branche de φ par laquelle (x, y) arrive en (a, b).* Plusieurs cas sont à distinguer.

14. Soit 1° :

$$\beta_{11} = \beta_{12} = \beta_{21} = \beta_{22} = \beta_{23} = 0;$$

ici, *la courbe ψ a un point triple en (a, b)* et $\psi(x, y)$ est de la forme

$$(\psi)\quad \psi(x, y) = \beta_{31}(x-a)^3 + \beta_{32}(x-a)^2(y-b) + \beta_{33}(x-a)(y-b)^2 + \beta_{34}(y-b)^3 + \beta_{41}(x-a)^4 + \ldots;$$

donc

$$\left[\frac{\psi(x, y)}{(x-a)^3}\right]_{a,b} = \beta_{31} + \beta_{32}y'_{a,b} + \beta_{33}y'^2_{a,b} + \beta_{34}y'^3_{a,b};$$

si les courbes φ, ψ n'ont pas de tangente commune, cette quantité n'est pas nulle : en effet, l'équation aux coefficients angulaires des

tangentes en (a, b) à la courbe

$$0 = \psi(\xi, \eta) = \beta_{31}(\xi - a)^3 + \ldots + \beta_{33}(\eta - b)^3 + \beta_{34}(\xi - a)^4 + \ldots$$

est celle-ci

$$\beta_{31} + \beta_{32}\eta'_{a,b} + \beta_{33}\eta'^2_{a,b} + \beta_{34}\eta'^3_{a,b} = 0;$$

si l'on avait

$$\beta_{31} + \beta_{32}y'_{a,b} + \beta_{33}y'^2_{a,b} + \beta_{34}y'^3_{a,b} = 0,$$

c'est que le coefficient angulaire $y'_{a,b}$ de l'une des tangentes à φ en (a, b) serait identique à l'un des coefficients angulaires des tangentes à ψ en (a, b).

Soit 2° :

$$\beta_{11} = \beta_{12} = 0, \tag{12}$$

$$\left[\beta_{21} + \beta_{22}\frac{y - b}{x - a} + \beta_{23}\left(\frac{y - b}{x - a}\right)^2\right]_{a,b} = 0; \tag{13}$$

ψ n'a plus qu'un point double en (a, b). La condition (13) donne lieu à la relation

$$\beta_{21} + \beta_{22}y'_{a,b} + \beta_{23}y'^2_{a,b} = 0. \tag{14}$$

Or, l'équation aux coefficients angulaires des tangentes en (a, b) à ψ,

$$0 = \psi(\xi, \eta) = \beta_{21}(\xi - a)^2 + \beta_{22}(\xi - a)(\eta - b) + \beta_{23}(\eta - b)^2 + \beta_{31}(\xi - a)^3 + \ldots \tag{ψ}$$

est

$$\beta_{21} + \beta_{22}\eta'_{a,b} + \beta_{23}\eta'^2_{a,b} = 0, \tag{15}$$

et la relation (14) suppose (15) que *l'une des deux branches de ψ est tangente à l'une des deux branches de φ.* Dans le cas présent,

$$\frac{\psi(x, y)}{(x - a)^3} = \frac{\beta_{21}(x - a)^2 + \beta_{22}(x - a)(y - b) + \beta_{23}(y - b)^2}{(x - a)^3} + \beta_{31} + \beta_{32}\frac{y - b}{x - a} + \beta_{33}\left(\frac{y - b}{x - a}\right)^2 + \beta_{34}\left(\frac{y - b}{x - a}\right)^3 + \beta_{41}(x - a) + \ldots;$$

la règle de l'Hopital, appliquée trois fois, montre que

$$\left[\frac{\beta_{21}(x - a)^2 + \beta_{22}(x - a)(y - b) + \beta_{23}(y - b)^2}{(x - a)^3}\right]_{a,b} = \frac{1}{2}\beta_{22}y'_{a,b} + \beta_{23}y'_{a,b}y''_{a,b};$$

il en résulte

$$\left[\frac{\psi(x,y)}{(x-a)^3}\right]_{a,b} = \frac{1}{2}\beta_{22}y''_{a,b} + \beta_{23}y'_{a,b}y''_{a,b} + \beta_{31} + \beta_{32}y'_{a,b} + \beta_{23}y'^2_{a,b} + \beta_{34}y'^3_{a,b}.$$

On verrait, comme au n° **12**, que

$$\left[\frac{\psi(x,y)}{(x-a)^3}\right]_{a,b}$$

n'est pas nul si le contact entre φ, ψ *est du premier ordre, mais est nul si ce contact est du deuxième ordre.*

Soit 3° :

La courbe ψ *a un point simple en* (a, b) *et un contact du deuxième ou du troisième ordre avec* φ; on verrait, comme précédemment, que

$$\left[\frac{\psi(x,y)}{(x-a)^3}\right]_{a,b}$$

a une limite finie non nulle si le contact est du second ordre et une limite nulle si le contact est du troisième ordre.

Les conclusions sont identiques à celles que nous avions trouvées (n° **9**) *dans le cas où* φ *a un point simple en* (a, b).

15. *Étudions maintenant le cas où les deux branches de* φ *sont tangentes l'une à l'autre en* (a, b). *Ici,*

$$(\varphi) \qquad \varphi(x,y) = 0 = [\alpha_1(x-a) + \beta_1(y-b)]^2 + \alpha_{31}(x-a)^3 + \alpha_{32}(x-a)^2(y-b) + \ldots.$$

Soit, pour un point voisin de (a, b),

$$(\psi) \qquad \psi(x,y) = \beta_{11}(x-a) + \beta_{12}(y-b) + \beta_{21}(x-a)^2 + \ldots.$$

$$\frac{y-b}{x-a} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} + \varepsilon,$$

où $\varepsilon_{a,b}$ est nul. On a

$$\frac{\psi(x,y)}{x-a} = \beta_{11} + \beta_{12}\frac{y-b}{x-a} + \beta_{21}(x-a) + \ldots,$$

$$= \beta_{11} + \beta_{12}\left(-\frac{\alpha_1}{\alpha_2} + \varepsilon\right) + \beta_{21}(x-a) + \ldots,$$

$$(16) \qquad \left[\frac{\psi(x,y)}{x-a}\right]_{a,b} = \beta_{11} - \beta_{12}\frac{\alpha_1}{\alpha_2}.$$

1° *Si la courbe* ψ, *qui a un point simple en* (a, b), *et dont la tangente en* (a, b) *a pour coefficient angulaire* $-\frac{\beta_{11}}{\beta_{12}}$, *est tangente à* φ, *on a*

$$\frac{\beta_{11}}{\beta_{12}} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2},$$

d'où (16)

$$\left[\frac{\psi(x, y)}{x-a}\right]_{a,b} = 0;$$

si ψ *n'est pas tangente à* φ,

$$\left[\frac{\psi(x, y)}{x-a}\right]_{a,b}$$

est fini non nul.

2° *Si la courbe* ψ *a un point double en* (a, b),

$$(\psi) \quad \psi(x, y) = \beta_{21}(x-a)^2 + \beta_{22}(x-a)(y-b) + \beta_{23}(y-b)^2 + \beta_{31}(x-a)^3 + \ldots,$$

$$\frac{\psi(x, y)}{(x-a)^2} = \beta_{21} + \beta_{22}\frac{y-b}{x-a} + \beta_{23}\left(\frac{y-b}{x-a}\right)^2 + \beta_{31}(x-a) + \ldots,$$

$$= \beta_{21} + \beta_{22}\left(-\frac{\alpha_1}{\alpha_2} + \varepsilon\right) + \beta_{23}\left(-\frac{\alpha_1}{\alpha_2} + \varepsilon\right)^2 + \beta_{31}(x-a) + \ldots,$$

$$\left[\frac{\psi(x, y)}{(x-a)^2}\right]_{a,b} = \beta_{21} - \beta_{22}\frac{\alpha_1}{\alpha_2} + \beta_{23}\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2;$$

on voit que

$$\left[\frac{\psi(x, y)}{(x-a)^2}\right]_{a,b}$$

n'est pas nul si ψ *n'a qu'un contact du premier ordre avec* φ; *mais elle est nulle si* ψ *a un contact du deuxième ordre ou d'ordre supérieur avec* φ.

Les conclusions sont donc encore identiques à celles que nous avions trouvées (n° 9) dans le cas où φ *a un point simple en* (a, b).

16. *Les conclusions subsistent si* ψ *a un point multiple avec plusieurs tangentes confondues en* (a, b), *que les deux branches de* φ *aient ou non même tangente.*

17. Nous pouvons maintenant conclure pour z.

Si (x, y) atteignant (a, b) par une certaine branche de φ, on a

$$\left[\frac{\psi(x, y)}{(x-a)^{n_1}}\right]_{a,b} = c_{11}, \qquad c_{11} \neq 0 \text{ et } \neq \infty,$$

et si, sur la même branche, on a

$$\left[\frac{\chi(x, y)}{(x-a)^{p_1}}\right]_{a,b} = c_{21}, \qquad c_{21} \neq 0 \text{ et } \neq \infty,$$

ce qui implique un contact d'ordre $n_1 - 1$ entre cette branche de φ et ψ, et un contact d'ordre $p_1 - 1$ entre cette même branche de φ et χ, la valeur correspondante z_1 de z est nulle, finie non nulle, ou infinie, selon que

$$n_1 > p_1, \qquad n_1 = p_1, \qquad n_1 < p_1.$$

Si (x, y) atteignant (a, b) par l'autre branche de φ, on a

$$\left[\frac{\psi(x, y)}{(x-a)^{n_2}}\right]_{a,b} = c_{12}, \qquad c_{12} \neq 0 \text{ et } \neq \infty,$$

$$\left[\frac{\chi(x, y)}{(x-a)^{p_2}}\right]_{a,b} = c_{22}, \qquad c_{22} \neq 0 \text{ et } \neq \infty,$$

la valeur correspondante z_2 de z est nulle, finie non nulle, ou infinie, selon que

$$n_2 > p_2, \qquad n_2 = p_2, \qquad n_2 < p_2.$$

Applications.

18. Voici quelques cas intéressants :

1° *Les courbes ψ, χ ont chacune un point simple en (a, b) et ne sont tangentes ni l'une ni l'autre à φ; de plus, ψ, χ ne sont pas tangentes entre elles en (a, b).*

Ici, d'abord sur l'une, puis sur l'autre branche de φ,

$$\left[\frac{\psi(x, y)}{x-a}\right]_{a,b} = c_{11}, \qquad \left[\frac{\chi(x, y)}{x-a}\right]_{a,b} = c_{21},$$

$$\left[\frac{\psi(x, y)}{x-a}\right]_{a,b} = c_{12}, \qquad \left[\frac{\chi(x, y)}{x-a}\right]_{a,b} = c_{22},$$

avec

$$c_{11}, \quad c_{21}, \quad c_{12}, \quad c_{22} \neq 0 \quad \text{et} \quad \neq \infty :$$

z_1 et z_2 sont donc finis non nuls.

Montrons que z_1 et z_2 *n'ont pas la même valeur*. En effet, en se reportant aux expressions de φ, ψ, χ écrites au n° **11**, on voit que, α_1 et α_2 étant les deux coefficients angulaires des tangentes à φ en (a, b),

$$z_1 = \frac{c_{11}}{c_{21}} = \frac{\beta_{11} + \beta_{12}\alpha_1}{\gamma_{11} + \gamma_{12}\alpha_1},$$

$$z_2 = \frac{c_{12}}{c_{22}} = \frac{\beta_{11} + \beta_{12}\alpha_2}{\gamma_{11} + \gamma_{12}\alpha_2}.$$

Si ces deux valeurs de z étaient identiques, nous aurions, puisque α_1 diffère de α_2 par hypothèse,

$$\frac{\beta_{11} + \beta_{12}\alpha_1}{\gamma_{11} + \gamma_{12}\alpha_1} = \frac{\beta_{11} + \beta_{12}\alpha_2}{\gamma_{11} + \gamma_{12}\alpha_2} = \frac{\beta_{12}(\alpha_1 - \alpha_2)}{\gamma_{12}(\alpha_1 - \alpha_2)} = \frac{\beta_{12}}{\gamma_{12}}$$
$$= \frac{(\beta_{11} + \beta_{12}\alpha_1) - \beta_{12}\alpha_1}{(\gamma_{11} + \gamma_{12}\alpha_1) - \gamma_{12}\alpha_1} = \frac{\beta_{11}}{\gamma_{11}},$$

et cela nécessiterait que les courbes ψ, χ soient tangentes l'une à l'autre en (a, b), contrairement à ce qui a été supposé.

Puisque z_1 et z_2 diffèrent l'un de l'autre, *la courbe* Γ *a un point double apparent sur la parallèle à Oz menée par (a, b).*

2° *Les courbes ψ et χ ont chacune un point simple en (a, b); elles ne sont tangentes ni l'une ni l'autre à φ, mais elles sont tangentes entre elles.*

L'analyse précédente montre que $z_1 = z_2$: ici, *la courbe gauche* Γ *a un point double vrai sur la parallèle à Oz menée par (a, b).*

3° *Les courbes ψ, χ ont chacune un point simple en (a, b); l'une de ces deux courbes a un contact simple avec une des deux branches de φ.*

*Si c'est la courbe ψ qui est tangente à une branche de φ en (a, b), quand (x, y) arrive en (a, b) par la branche de φ où a lieu le contact, z est nul; quand (x, z) arrive en (a, b) par l'autre branche, z est fini non nul (n° **12**).*

Si c'est la courbe χ qui est tangente à une branche de φ, l'une des valeurs de z est infinie, l'autre est finie.

4° Plus généralement, *si ψ a un contact d'ordre $n - 1$ avec une branche de φ, si χ a un contact d'ordre $p - 1$ avec la même branche de φ, quand (x, y) arrive en (a, b) par la branche de φ où a lieu le*

contact, la valeur correspondante de z est nulle, finie non nulle, ou infinie selon que

$$n > p, \qquad n = p, \qquad n < p.$$

Étudions complètement le cas où l'on a

$$n = p.$$

Ici,

$$z = \frac{\psi(x, y)}{\chi(x, y)},$$

$$\begin{aligned}\psi(x, y) = \beta_{11}(x-a) &+ \beta_{12}(y-b) + \ldots \\ &+ \beta_{n1}(x-a)^n + \beta_{n2}(x-a)^{n-1}(y-b) + \ldots \\ &+ \beta_{n,n+1}(y-b)^n + \beta_{n+1,1}(x-a)^{n+1} + \ldots.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\chi(x, y) = \gamma_{11}(x-a) &+ \gamma_{12}(y-b) + \ldots \\ &+ \gamma_{n1}(x-a)^n + \gamma_{n2}(x-a)^{n-1}(y-b) + \ldots \\ &+ \gamma_{n,n+1}(y-b)^n + \gamma_{n+1,1}(x-a)^{n+1} + \ldots;\end{aligned}$$

faisons

$$y - b = \alpha_1(x-a);$$

il vient, si ψ et χ ont l'une et l'autre un contact d'ordre $n-1$ avec la branche de φ qui a α_1 pour coefficient angulaire,

$$z = \frac{\psi(x, y)}{\chi(x, y)} = \frac{(\beta_{n1} + \beta_{n2}\alpha_1 + \ldots + \beta_{n,n+1}\alpha_1^n)(x-a)^n + \beta_{n+1,1}(x-a)^{n+1} + \ldots}{(\gamma_{n1} + \gamma_{n2}\alpha_1 + \ldots + \gamma_{n,n+1}\alpha_1^n)(x-a)^n + \gamma_{n+1,1}(x-a)^{n+1} + \ldots},$$

d'où

$$z_1 = \left[\frac{\psi(x, y)}{\chi(x, y)}\right]_{a,b} = \frac{\beta_{n1} + \beta_{n2}\alpha_1 + \ldots + \beta_{n,n+1}\alpha_1^n}{\gamma_{n1} + \gamma_{n2}\alpha_1 + \ldots + \gamma_{n,n+1}\alpha_1^n};$$

d'autre part, si ψ_1 et χ ont chacune un contact d'ordre $m-1$ avec la branche de φ qui a α_2 pour coefficient angulaire,

$$z_2 = \frac{\beta_{m1} + \beta_{m2}\alpha_2 + \ldots + \beta_{m,m+1}\alpha_2^m}{\gamma_{m1} + \gamma_{m2}\alpha_2 + \ldots + \gamma_{m,m+1}\alpha_2^m};$$

ces valeurs z_1, z_2 de z sont finies non nulles. Elles peuvent être égales : Γ peut avoir soit un point double apparent, soit un nœud sur la parallèle à Oz menée par (a, b).

5° *Si ψ est tangente à une branche de φ, et si χ est tangente à l'autre branche de φ, les valeurs correspondantes de z sont : zéro pour la première branche de φ, l'infini pour la seconde branche de φ.*

6° *Quand* φ *a en* (a, b) *un point double à tangentes confondues* (n° **15**), z *n'a plus qu'une seule valeur*, Γ *a un nœud, situé soit en* (a, b), *soit à distance finie sur la parallèle à* Oz *menée par* (a, b), *soit encore rejeté à l'infini sur cette parallèle, selon que* ψ *a en* (a, b), *avec* φ, *un contact d'ordre supérieur, égal ou inférieur à celui que* χ *a lui-même avec* φ.

On observera que les tangentes à Γ au nœud sont dans un plan parallèle à Oz, puisqu'elles se projettent sur le plan Oxy suivant une même droite, l'unique tangente à φ.

POINTS MULTIPLES DE φ OU PASSE AU MOINS L'UNE DES COURBES ψ, χ.

19. Il ressort de ce qui a été dit des points simples et des points doubles de φ, et sans qu'il soit nécessaire d'insister sur le sujet, qu'*il est toujours possible de préciser la nature des points qu'une courbe gauche* Γ *a sur la parallèle à* Oz *menée par un point singulier* (a, b) *de* φ *où passe au moins l'une des deux courbes* ψ, χ.

On peut rencontrer sur cette parallèle : des points multiples apparents, des points multiples apparents et en même temps des points multiples vrais, ou encore des points multiples vrais seulement ; *l'étude des singularités des courbes planes* φ, ψ, χ *permettra toujours de reconnaître ces points et de les distinguer les uns des autres*. Quant à l'allure de la courbe Γ aux environs d'un point singulier vrai, c'est l'allure même de φ au point correspondant du plan des xy qui donnera la solution du problème.

Il existe un cas d'exception, de peu d'importance, dont on a vu un exemple au n° **7**.

Singularités vraies d'une courbe gauche Γ.

20. J'insiste cependant sur ce qui suit : quelques éclaircissements sont en effet nécessaires. Indépendamment des points singuliers vrais de Γ, décelés par des points singuliers de φ où ne passent ni ψ, ni χ, nous avons constaté (n° **18**, 2°) que Γ a un nœud quand ψ, χ ont un point double simple en (a, b) et sont tangentes l'une à l'autre en ce point, (a, b) étant un point double à tangentes distinctes de φ.

1° Plus généralement, *soit* (a, b) *un point double de* φ *et* α_1, α_2 *les coefficients angulaires des deux tangentes à* φ *en* (a, b); α_1 *est différent de* α_2 *par hypothèse. Supposons qu'en* (a, b) ψ, χ *aient chacune un point multiple d'ordre* n; z *aura deux valeurs* z_1, z_2 *sur la parallèle à* Oz *menée par* (a, b) :

$$z_1 = \frac{\beta_{n,1} + \beta_{n,2}\alpha_1 + \beta_{n,3}\alpha_1^2 + \ldots + \beta_{n,n+1}\alpha_1^n}{\gamma_{n,1} + \gamma_{n,2}\alpha_1 + \gamma_{n,3}\alpha_1^2 + \ldots + \gamma_{n,n+1}\alpha_1^n},$$
$$z_2 = \frac{\beta_{n,1} + \beta_{n,2}\alpha_2 + \beta_{n,3}\alpha_2^2 + \ldots + \beta_{n,n+1}\alpha_2^n}{\gamma_{n,1} + \gamma_{n,2}\alpha_2 + \gamma_{n,3}\alpha_2^2 + \ldots + \gamma_{n,n+1}\alpha_2^n}.$$

Ces deux valeurs de z seront égales, en particulier, si $\beta_{n,1}$, $\beta_{n,2}$, ..., $\beta_{n,n+1}$ sont proportionnels à $\gamma_{n,1}$, $\gamma_{n,2}$, ..., $\gamma_{n,n+1}$, c'est-à-dire si ψ, χ ont les mêmes tangentes en (a, b); mais, sauf le cas où (a, b) est un point simple de ψ et de χ, cette condition est simplement suffisante, elle n'est pas nécessaire.

2° *Si* φ *a un point triple à tangentes distinctes en* (a, b), *si* α_1, α_2, α_3 sont les coefficients angulaires, différents les uns des autres de ces tangentes, *si* ψ *et* χ *ont chacune un point simple en* (a, b), on a

$$z_1 = \frac{\beta_{11} + \beta_{12}\alpha_1}{\gamma_{11} + \gamma_{12}\alpha_1},$$
$$z_2 = \frac{\beta_{11} + \beta_{12}\alpha_2}{\gamma_{11} + \gamma_{12}\alpha_2},$$
$$z_3 = \frac{\beta_{11} + \beta_{12}\alpha_3}{\gamma_{11} + \gamma_{12}\alpha_3};$$

le contact entre ψ, χ entraine

$$z_1 = z_2 = z_3;$$

réciproquement, si

$$z_1 = z_2,$$

ψ et χ sont tangentes en (a, b); il en résulte que β_{11}, β_{12} sont proportionnels à γ_{11}, γ_{12} et que

$$z_3 = z_1 = z_2;$$

Γ a donc un point triple apparent si ψ *et* χ *ne sont pas tangentes l'une à l'autre et un point triple vrai si* ψ, χ *sont tangentes l'une à l'autre.*

3° *Si* φ *a un point triple à tangentes distinctes en* (a, b),

si $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \alpha_3$ sont les coefficients angulaires des tangentes en ce point, *si* ψ, χ *ont chacune un point double* en (a, b), z a les valeurs

$$z_1 = \frac{\beta_{21} + \beta_{22}\alpha_1 + \beta_{23}\alpha_1^2}{\gamma_{21} + \gamma_{22}\alpha_1 + \gamma_{23}\alpha_1^2},$$
$$z_2 = \frac{\beta_{21} + \beta_{22}\alpha_2 + \beta_{23}\alpha_2^2}{\gamma_{21} + \gamma_{22}\alpha_2 + \gamma_{23}\alpha_2^2},$$
$$z_3 = \frac{\beta_{21} + \beta_{22}\alpha_3 + \beta_{23}\alpha_3^2}{\gamma_{21} + \gamma_{22}\alpha_3 + \gamma_{23}\alpha_3^2};$$

si l'on a

$$z_1 = z_2 = z_3,$$

c'est que

$$\frac{\beta_{21} + \beta_{22}\alpha_1 + \beta_{23}\alpha_1^2}{\gamma_{21} + \gamma_{22}\alpha_1 + \gamma_{23}\alpha_1^2} = \frac{\beta_{21} + \beta_{22}\alpha_2 + \beta_{23}\alpha_2^2}{\gamma_{21} + \gamma_{22}\alpha_2 + \beta_{23}\alpha_2^2} = \frac{\beta_{21} + \beta_{22}\alpha_3 + \beta_{23}\alpha_3^2}{\gamma_{21} + \gamma_{22}\alpha_3 + \gamma_{23}\alpha_3^2} = \lambda,$$

ce qu'on peut écrire

$$(\beta_{23} - \lambda\gamma_{23})\alpha_1^2 + (\beta_{22} - \lambda\gamma_{22})\alpha_1 + \beta_{21} - \lambda\gamma_{21} = 0,$$
$$(\beta_{23} - \lambda\gamma_{23})\alpha_2^2 + (\beta_{22} - \lambda\gamma_{22})\alpha_2 + \beta_{21} - \lambda\gamma_{21} = 0,$$
$$(\beta_{23} - \lambda\gamma_{23})\alpha_3^2 + (\beta_{22} - \lambda\gamma_{22})\alpha_3 + \beta_{21} - \lambda\gamma_{21} = 0:$$

l'équation du second degré

$$(\beta_{23} - \lambda\gamma_{23})\alpha^2 + (\beta_{22} - \lambda\gamma_{22})\alpha + \beta_{21} - \lambda\gamma_{21} = 0$$

admettant *trois racines distinctes*, α_1, α_2, α_3, a ses coefficients identiquement nuls :

$$\beta_{23} - \lambda\gamma_{23} = \beta_{22} - \lambda\gamma_{22} = \beta_{21} - \lambda\gamma_{21} = 0;$$

donc

$$\frac{\beta_{21}}{\gamma_{21}} = \frac{\beta_{22}}{\gamma_{22}} = \frac{\beta_{23}}{\gamma_{23}};$$

il en résulte que les courbes ψ, χ *ont les mêmes tangentes en* (a, b).

La réciproque est vraie : *si les courbes* ψ, χ *ont chacune un point double avec mêmes tangentes en* (a, b), *la courbe gauche* Γ *a un point triple vrai sur la parallèle à* Oz *menée par* (a, b).

Nous ne pouvons rien préciser, sans faire intervenir les données propres de la courbe, si

$$\alpha_1 = \alpha_2 \neq \alpha_3 :$$

Γ peut avoir trois points distincts, ou bien un point simple et un point double.

21. Des propositions analogues peuvent être énoncées dans le cas où φ a un point multiple d'ordre n en (a, b). Indiquons celle-ci :

Si les courbes ψ, χ ont chacune un point multiple d'ordre p en (a, b), $p < n$,

$$z_{\alpha_1} = z_{\alpha_2} = \ldots = z_{\alpha_{p+1}},$$

il en résulte

$$\beta_{p1} = \lambda\gamma_{p1}, \qquad \beta_{p2} = \lambda\gamma_{p2}, \qquad \ldots, \qquad \beta_{p,p+1} = \lambda\gamma_{p,p+1},$$

et les courbes φ, χ ont mêmes tangentes en (a, b); par conséquent, les autres valeurs de z,

$$z_{\alpha_{p+2}}, \quad \ldots, \quad z_{\alpha_n}$$

sont égales aux précédentes : *la courbe Γ a donc un point multiple d'ordre n sur la parallèle à Oz menée par (a, b).*

Voici un résultat intéressant, que *nous aurons à rappeler* (n° **33**). Soit (α, β) un point multiple d'ordre p de φ, avec h tangentes distinctes à φ; supposons que (α, β) soit multiple d'ordre q pour ψ, mais n'appartienne pas à χ.

Pour (x, y) voisin de (α, β)

$$z_{x,y} = \frac{\psi(x, y)}{\chi(x, y)} = \frac{\beta_{q,1}(x-\alpha)^q + \beta_{q,2}(x-\alpha)^{q-1}(y-\beta) + \ldots + \beta_{q,q+1}(y-\beta)^q + \beta_{q+1,1}(x-\alpha)^{q+1} + \ldots}{\gamma_0 + \gamma_{11}(x-\alpha) + \gamma_{12}(y-\beta) + \gamma_{21}(x-\alpha)^2 + \ldots}$$

$$= \frac{\beta_{q,1} + \beta_{q,2}\dfrac{y-\beta}{x-\alpha} + \ldots + \beta_{q,q+1}\left(\dfrac{y-\beta}{x-\alpha}\right)^q + \beta_{q+1,1}(x-\alpha) + \ldots}{\gamma_0 + \gamma_{11}(x-\alpha) + \gamma_{12}(y-\beta) + \gamma_{22}(x-\alpha)^2 + \ldots}(x-\alpha)^q.$$

Écrivons

$$\frac{y-\beta}{x-\alpha} = \delta_k + \varepsilon_k \qquad (\varepsilon_k)_{\alpha,\beta} = 0,$$

où δ_k est l'un des h coefficients angulaires des tangentes à φ en (α, β); les valeurs de z aux environs de (α, β) sont

$$z_k = \frac{\beta_{q,1} + \beta_{q,2}(\delta_k + \varepsilon_k) + \ldots + \beta_{q,q+1}(\delta_k + \varepsilon_k)^q + \beta_{q+1,1}(x-\alpha) + \ldots}{\gamma_0 + \gamma_{11}(x-\alpha) + \gamma_{12}(y-\beta) + \gamma_{21}(x-\alpha)^2 + \ldots}(x-\alpha)^q;$$

ces valeurs tendent toutes vers zéro quand (x, y) tend vers (α, β); elles sont d'ailleurs au nombre de p, puisque φ a p branches en (α, β).

En (α, β)

$$\left[\frac{z_k}{(x-\alpha)^q}\right]_{\alpha,\beta} = \frac{\beta_{q,1} + \beta_{q,2}\delta_k + \ldots + \beta_{q,q+1}\delta_k^q}{\gamma_0}$$

n'est pas nul, à moins que δ_k ne soit racine du numérateur égalé à zéro, ce qui ne modifierait que peu les conclusions.

Ceci montre que, non seulement les p valeurs de z correspondant au point (α, β) sont nulles, mais encore qu'au point $(\alpha, \beta, 0)$ les p branches de la courbe gauche Γ n'ont que h tangentes distinctes; il y a exception, pour ce dernier point, si plusieurs tangentes à Γ sont dans un plan (ou des plans) parallèle à Oz; Γ peut avoir alors plus de h tangentes distinctes.

Les conclusions sont identiques si (α, β), multiple d'ordre p pour φ, multiple d'ordre q pour ψ, est multiple d'ordre $r\,(r < q)$ pour χ.

En particulier, *si Γ n'a pas de points singuliers vrais, un point (α, β), commun à φ, ψ, où ne passe pas χ, ne peut pas être multiple pour φ : en un tel point, $p = 1$.*

Enfin, si (α, β), multiple d'ordre p pour φ, d'ordre q pour ψ, est multiple d'ordre $r\,(r > q)$ pour χ, Γ n'a sur la parallèle à Oz menée par (α, β) qu'un point de multiplicité p rejeté à l'infini.

II. — REPRÉSENTATIONS ÉQUIVALENTES D'UNE COURBE GAUCHE.

FORMATION D'UNE IDENTITÉ.

22. Nous allons nous appuyer sur la proposition bien connue que voici :

Soient deux courbes planes

$$\varphi(x, y) = 0, \qquad \psi(x, y) = 0$$

et (α_i, β_i) leurs points communs; si (α_i, β_i) est multiple [1] *d'ordre p_i*

---

[1] Il s'agit ici de points multiples dans le sens indiqué n° 9, note 1.

pour φ, *d'ordre* q_i *pour* ψ, *si* φ, ψ *n'ont aucun contact mutuel; si*

$$f(x, y) = 0$$

est l'équation d'une courbe plane passant par tous les points (α_i, β_i) *et ayant en chacun des points* (α_i, β_i) *un point multiple d'ordre* $p_i + q_i - 1$, on sait que *les polynomes* f, φ, ψ *sont liés par une relation de la forme*

$$f(x, y) = Q(x, y)\psi(x, y) + Q'(x, y)\varphi(x, y),$$

où les courbes

$$Q(x, y) = 0, \qquad Q'(x, y) = 0$$

ont en (α_i, β_i) *des points multiples d'ordres respectifs* $p_i - 1$, $q_i - 1$; $f(x, y)$ *peut être le monome*

$$(x - \alpha_1)^{p_1+q_1-1}(x - \alpha_2)^{p_2+q_2-1}\ldots.$$

25. Proposons-nous de déterminer les polynomes $Q(x, y)$, $Q'(x, y)$ qui figurent dans l'identité

$$(17)\quad (x - \alpha_1)^{p_1+q_1-1}(x - \alpha_2)^{p_2+q_2-1}\ldots = Q(x, y)\psi(x, y) + Q'(x, y)\varphi(x, y).$$

Considérons d'abord les deux polynomes φ, ψ, définis par les équations

$$(18)\quad \begin{cases} A_1(x)y^2 + A_2(x)y + A_3(x) = \varphi, \\ B_1(x)y^2 + B_2(x)y + B_3(x) = \psi \end{cases} \quad [A_1(x), \ldots, B_3(x) \text{ polynomes en } x].$$

Éliminons y entre les deux équations

$$(19)\quad \begin{cases} A_1(x)y^2 + A_2(x)y + A_3(x) - \varphi = 0, \\ B_1(x)y^2 + B_2(x)y + B_3(x) - \psi = 0: \end{cases}$$

il vient

$$[A_1(B_3 - \psi) - B_1(A_3 - \varphi)]^2 + (A_2B_1 - A_1B_2)[A_2(B_2 - \psi) - b_2(A_3 - \varphi)] = 0$$

ou bien

$$\begin{aligned}(20)\quad & (A_1B_3 - B_1A_3)^2 + (A_2B_1 - A_1B_2)(A_2B_3 - B_1A_3) \\ & [2(A_1B_3 - B_1A_3)A_1 + (A_2B_1 - A_2B_2)A_2 - A_1^2\psi + \lambda(x, y)\varphi]\psi \\ & + [-2(A_1B_3 - B_1A_3)B_1 - (A_2B_1 - A_1B_2)B_2 - B_1^2 \\ & \qquad + 2A_1B_1\psi - \lambda(x, y)\psi]\varphi.\end{aligned}$$

On introduit un polynome *arbitraire* $\lambda(x, y)$, auquel on peut donner, en particulier, l'une des deux formes

$$\lambda(x, y) = 0, \qquad \lambda(x, y) = 2A_1B_1\psi.$$

Remplaçons, *dans les* [ ] *du second membre*, φ et ψ par leurs valeurs (18); il vient

$$\begin{aligned}
&(A_1B_3 - B_1A_3)^2 + (A_2B_1 - A_1B_2)(A_2B_3 - B_1A_3)\\
&\quad = [2(A_2B_3 - B_1A_3)A_1 + (A_2B_1 - A_1B_2)A_2\\
&\qquad - A_1^2(B_1y^2 + B_2y + B_3) + \lambda(x, y)(A_1y^2 + A_2y + A_3)]\psi + [\ldots]\varphi,
\end{aligned}$$

identité de la forme

$$(21)\quad (A_1B_3 - B_1A_3)^2 + (A_2B_1 - A_1B_2)(A_2B_3 - B_1A_3) = H(x, y)\psi + H'(x, y)\varphi,$$

où les polynomes $H(x, y)$, $H'(x, y)$ *sont parfaitement déterminés et calculables;* ils contiennent un polynome arbitraire $\lambda(x, y)$. *Le premier membre de la relation* (21) *est le résultant de* φ, ψ.

Ceci peut être généralisé bien facilement. Entre les équations

$$(22)\quad \begin{cases} A_1(x)y^m + A_2(x)y^{m-1} + \ldots + A_m(x)y + A_{m+1}(x) - \varphi = 0,\\ B_1(x)y^n + B_2(x)y^{n-1} + \ldots + B_n(x)y + B_{n+1}(x) - \psi = 0,\end{cases}$$

on peut éliminer y, par la méthode de Sylvester par exemple, et écrire

$$(23)\quad \begin{vmatrix}
A_1(x) & A_2(x) & \ldots & A_m(x) & A_{m+1}(x)-\varphi & 0 & 0\\
0 & A_1(x) & \ldots & \ldots\ldots & A_m(x) & A_{m+1}(x)-\varphi & 0\\
. & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & .\\
0 & 0 & & A_1(x)\ A_2(x) & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & A_m(x)\ A_{m+1}(x)-\varphi\\
B_1(x) & A_2(x) & \ldots & \ldots\ldots\ B_n(x) & B_{n+1}(x)-\psi & 0 & 0\\
0 & B_1(x) & \ldots & \ldots\ldots & B_n(x) & B_{n+1}(x)-\psi & 0\\
. & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & .\\
0 & 0 & \ldots & B_1(x)\ B_2(x) & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & B_n(x)\ B_{n+1}(x)-\psi
\end{vmatrix} = 0.$$

Ce déterminant, développé, donnera lieu à une identité

$$\begin{aligned}
(24)\quad R(\varphi, \psi) = {}& [C_1(x) + C_2(x)\psi + C_3(x)\psi^2 + \ldots + C_h(x)\psi^h + \lambda(x, y)\varphi]\psi\\
&+ \{D_1(x) + D_2(x)\varphi + D_3(x)\varphi^2 + \ldots\\
&\quad + (E_1(x) + E_2(x)\varphi + E_3(x)\varphi^2 + \ldots)\psi\\
&\quad + (F_1(x) + F_2(x)\varphi + \ldots)\psi^2 + \ldots - \lambda(x, y)\psi]\varphi,
\end{aligned}$$

où le premier membre, qui peut être obtenu en faisant $\psi = 0$, $\varphi = 0$ dans (23), est le *résultant* $R(\varphi, \psi)$ des équations

$$\varphi = 0, \qquad \psi = 0$$

ou (22) de

$$A_1(x)y^m + \ldots + A_{m+1}(x) = 0, \qquad B_1(x)y^n + \ldots + B_{n+1}(x) = 0.$$

Comme précédemment, $\lambda(x, y)$ est un polynome *arbitraire*.

Si l'on remplace dans les [ ] du second membre de (24) φ et ψ par leurs expressions (22), l'identité (24) prend la forme

$$(25) \qquad R(\varphi, \psi) = H(x, y)\psi + H'(x, y)\varphi:$$

on a ainsi mis le résultant de φ, ψ sous la forme

$$H(x, y)\psi(x, y) + H'(x, y)\varphi(x, y),$$

où $H(x, y)$, $H'(x, y)$ sont des polynomes bien déterminés et calculables, renfermant un polynome arbitraire $\lambda(x, y)$.

24. L'identité (25) peut s'écrire, en faisant $\varphi = 0$, et en le rappelant par la notation spéciale qu'on va introduire,

$$(26) \qquad R(\varphi, \psi) = H(x, y)\psi \qquad (\varphi = 0).$$

Nous aurons souvent à utiliser cette identité. Elle exprime que, *pour tous les points (x, y) appartenant à la courbe φ, $R(\varphi, \psi)$ et $H(x, y)\psi$ ont des valeurs identiques.*

On comprend facilement le sens de l'identité (26) si l'on fait la remarque suivante. Dans le cas particulier où $\varphi(x, y)$ est une courbe *unicursale*, on peut remplacer l'équation

$$\varphi(x, y) = 0$$

par des équations de la forme

$$(27) \qquad x = a(t), \qquad y = b(t),$$

$a(t)$, $b(t)$ étant des fonctions rationnelles. Écrire la relation (26) revient alors à remplacer dans (25) x et y par les expressions (27) ce

qui donne une *identité*, de forme ordinaire,

$$R(t) = H[a(t),\ b(t)],\ \psi[a(t),\ b(t)],$$

équivalente, dans le cas présent, à (26).

25. Soient (α_1, β_1), (α_2, β_2), ... les points communs à φ, ψ; soient $p_1, p_2, \ldots$ les ordres de multiplicité de ces points pour φ, et $q_1, q_2, \ldots$ leurs ordres de multiplicité pour ψ; on sait que le résultant de φ, ψ a pour expression

$$R(\varphi, \psi) = (x - \alpha_1)^{p_1 q_1}(x - \alpha_2)^{p_2 q_2} \ldots,$$

sous réserve qu'aucune parallèle à Oy *ne passe par deux points* (α_i, β_i), (α_j, β_j) *communs à* φ, ψ [1].

La relation (25) peut donc être écrite

$$(x - \alpha_1)^{p_1 q_1}(x - \alpha_2)^{p_2 q_2} \ldots = H(x, y)\psi + H'(x, y)\varphi,$$

ou, en faisant apparaître le polynome arbitraire $\lambda(x, y)$,

$$(28) \qquad \begin{aligned} &(x - \alpha_1)^{p_1 q_1}(x - \alpha_2)^{p_2 q_2} \ldots \\ &\quad = [H(x, y) + \lambda(x, y)\varphi]\psi + [H'(x, y) - \lambda(x, y)\psi]\varphi. \end{aligned}$$

D'autre part, *si les courbes* φ, ψ *n'ont pas de contacts,*

$$(x - \alpha_1)^{p_1 + q_1 - 1}(x - \alpha_2)^{p_2 + q_2 - 1} \ldots$$

peut être mis (n° **22**) sous la forme

$$(29) \qquad (x - \alpha_1)^{p_1 + q_1 - 1}(x - \alpha_2)^{p_2 + q_2 - 1} \ldots = Q(x, y)\psi + Q'(x, y)\varphi,$$

qu'il nous faudra pouvoir former effectivement dans un cas particulier important (n° **29**).

Nous pouvons déduire (29) de (28) en choisissant convenablement l'arbitraire $\lambda(x, y)$ de l'identité (28), *que nous savons écrire.*

En fait, la question n'offre pas de difficultés. Elle est même toute résolue, pour le facteur $x - \alpha_1$, dans le cas où l'un des deux nombres

---

[1] On y pourvoira en choisissant convenablement l'orientation des axes Ox et Oy.

p_1, q_1 se réduit à l'unité, puisque

$$p_1 q_1 - (p_1 + q_1 - 1) = (p_1 - 1)(q_1 - 1).$$

Considérons par exemple les polynomes φ, ψ

$$x^2(x^2 + y^2) - x(x^2 - y^2) = \varphi, \tag{30}$$

$$x^2 - 5xy + 6y^2 = \psi. \tag{31}$$

A l'origine des coordonnées, la courbe φ a un point triple et ψ a un point double; pour ce point,

$$p_1 = 3, \qquad q_1 = 2.$$

Les autres points communs à φ, ψ sont des points simples. Le résultant des premiers membres de (30) et (31) contiendra donc le facteur x^6 qui devra être ramené à x^4. Éliminons à cet effet y entre les équations proposées, qu'on écrira

$$x(x+1)y^2 + x^3(x-1) - \varphi = 0,$$
$$6y^2 - 5xy + x^2 - \psi = 0.$$

Il vient

$$[x(x+1)(x^2 - \psi) - 6(x^3(x-1) - \varphi)]^2 + 25x^3(x+1)[x^3(x-1) - \varphi] = 0,$$
$$[x^3(-5x+7) - x(x+1)\psi + 6\varphi]^2 + 25x^3(x+1)[x^3(x-1) - \varphi] = 0,$$
$$2x^6(5x-3)(5x-4) - 2x^4(x+1)(-5x+7)\psi + x^2(x+1)^2\psi^2$$
$$+ [12x^3(-5x+7) - 25x^3(x+1)]\varphi - 12x(x+1)\varphi\psi + 36\varphi^2 = 0,$$

ce que nous écrirons, $\lambda(x, y)$ étant arbitraire,

$$\begin{aligned} &2x^6(5x-3)(5x-4) \\ &\quad = [2x^4(x+1)(-5x+7) - x^2(x+1)^2\psi + \lambda(x,y)\varphi]\psi \\ &\qquad + [x^3(85x-59) + 12x(x+1)\psi - 36\varphi - \lambda(x,y)]\varphi. \end{aligned} \tag{32}$$

Prenons

$$\lambda(x, y) = 6x(x+1); \tag{33}$$

nous aurons

$$\begin{aligned} &[12x(x+1) - \lambda(x,y)]\psi - 36\varphi \\ &\quad = 6[x(x+1)\psi - 6\varphi] \\ &\quad = 6[x(x+1)(6y^2 - 5xy + x^2) - 6x(x+1)y^2 - 6x^3(x-1)] \\ &\quad = 6[x(x+1)(-5xy + x^2) - 6x^3(x-1)] \\ &\quad = -6x^2(5x^2 + 5xy - 7x + 5y); \end{aligned} \tag{34}$$

portons dans (32); il vient, en remplaçant, dans le premier [ ] du second membre de (32), ψ, φ par leurs valeurs (30) et (31) et $\lambda(x, y)$ par sa valeur (33), *et en supprimant le facteur x^2 qui apparaît :*

$$\begin{aligned}
&2x^4(5x-3)(5x-4)\\
&\quad=[2x^2(x+1)(-5x+7)-(x+1)^2(6y^2-5xy+x^2)\\
&\qquad\qquad+6(x+1)(x^3+xy^2-x^2+y^2)]\psi(x, y)\\
&\quad+[x(85x-59)-6(5x^2+5xy-7x+5y)]\varphi(x, y),
\end{aligned}$$

ce qui est la forme (29), avec

$$x^{p+q-1}=x^4$$

en évidence.

26. Voici quelques remarques propres à simplifier le calcul de l'identité (29), la formule (28) étant prise comme point de départ. Nous y trouverons l'occasion de préciser, en certains points, les polynomes $H(x, y)$, $H'(x, y)$.

27. Démontrons d'abord cette proposition :

Il suffit de prendre pour $\lambda(x, y)$ un polynome tel que

$$H(x, y)+\lambda(x, y)\varphi(x, y)$$

admette le facteur

$$(x-\alpha_1)^{(p_1-1)(q_1-1)}(x-\alpha_2)^{p_2-1)(q_2-1)}\ldots.$$

En effet, dans cette hypothèse, la formule (28) devient

$$\begin{aligned}
(35)\qquad &(x-\alpha_1)^{p_1q_1}(x-\alpha_2)^{p_2q_2}\ldots\\
&=(x-\alpha_1)^{(p_1-1)(q_1-1)}(x-\alpha_2)^{(p_2-1)(q_2-1)}Q(x, y)\psi(x, y)\\
&\quad+[H'(x, y)-\lambda(x, y)\psi(x, y)]\varphi(x, y),
\end{aligned}$$

où l'on a écrit

$$\begin{aligned}
(36)\qquad &H(x, y)+\lambda(x, y)\varphi(x, y)\\
&=(x-\alpha_1)^{(p_1-1)(q_1-1)}(x-\alpha_2)^{(p_2-1)(q_2-1)}\ldots Q(x, y).
\end{aligned}$$

l'identité (35) montre ensuite que

$$[H'(x, y)-\lambda(x, y)\psi(x, y)]\varphi(x, y)$$

est divisible par $(x-\alpha_1)^{(p_1-1)(q_1-1)}(x-\alpha_2)^{p_2-1)(q_2-1}$.

Il s'agit d'établir que c'est le coefficient de $\varphi(x, y)$ qui admet ce facteur. Or, en particulier,

$$[H'(\alpha_1, y) - \lambda(\alpha_1, y)\psi(\alpha_1, y)]\varphi(\alpha_1, y)$$

est nul, quel que soit y (35); mais $\varphi(\alpha_1, y)$ ne s'annule que pour certaines valeurs β_1, β_{12}, β_{13}, ... de y, qui sont les ordonnées des points où la droite $x - \alpha_1 = 0$ coupe φ; donc $\varphi(\alpha_1, y)$ n'est pas nul quel que soit y et c'est

$$H'(\alpha_1, y) - \lambda(\alpha_1, y)\psi(\alpha_1, y)$$

qui possède cette propriété; par conséquent, c'est bien

$$H'(x, y) - \lambda(x, y)\psi(x, y)$$

qui est de la forme

$$(37) \quad H'(x, y)\lambda(x, y)\psi(x, y) = (x - \alpha_1)^{(p_1-1)(q_1-1)}(x - \alpha_2)^{(p_2-1)(q_2-1)}\ldots Q'(x, y);$$

si l'on porte dans (28) les valeurs (36) et (37) de $H + \lambda\varphi$, $H' - \lambda\psi$, on trouve, après réductions,

$$(x - \alpha_1)^{p_1+q_1-1}(x - \alpha_2)^{p_2+q_2+1}\ldots = Q(x, y)\psi + Q'(x, y)\varphi:$$

la forme (29) est ainsi déduite de (28) par le seul fait que $\lambda(x, y)$ a été choisi comme on l'a annoncé.

28. *Montrons comment, dans ce cas général, on choisira* $\lambda(x, y)$ *de manière à rendre* $H(x, y) + \lambda(x, y)\varphi(x, y)$ *divisible par*

$$(x - \alpha_1)^{(p_1-1)(q_1-1)}(x - \alpha_2)^{(p_2-1)(q_2-1)}\ldots.$$

Ne nous occupons, tout d'abord, que du facteur $(x - \alpha_1)^{(p_1-1)(q_1-1)}$. Écrivons (28)

$$\begin{aligned}&(x - \alpha_1)^{p_1q_1}(x - \alpha_2)^{p_2q_2}\ldots\\ &\quad = [H_{p_1q_1-q_1}(x, y) + \lambda_{p_1q_1-p_1-q_1}(x, y)\varphi_{p_1}(x, y)]\psi_{q_1}(x, y) + (H' - \lambda\psi)\varphi.\end{aligned}$$

Par hypothèses : 1° $\varphi_{p_1}(x, y)$ admet un point multiple d'ordre p_1 et $\psi_{q_1}(x, y)$ un point multiple d'ordre q_1 en (α_1, β_1), ce que rappelleront leurs indices; 2° $\lambda(x, y)$ devra être choisi de manière que (28) soit réductible à la forme, intermédiaire entre (28) et (29) :

$$(38) \qquad (x - \alpha_1)^{p_1+q_1-1}(x - \alpha_2)^{p_2q_2}\ldots = K(x, y)\psi + K'(x, y)\varphi,$$

où $K_{p_1-1}(x, y)$, $K'_{q_1-1}(x, y)$ ont respectivement un point multiple d'ordre $p_1 - 1$, $q_1 - 1$ en (α_1, β_1).

Multiplions (38) par $(x - \alpha_1)^{(p_1-1)(q_1-1)}$; il vient

$$(x-\alpha_1)^{p_1q_1}(x-\alpha_2)^{p_2q_2}\ldots = (x-\alpha_1)^{(p_1-1)(q_1-1)}K_{p_1-1}\psi_{q_1} + (x-\alpha_1)^{(p_1-1)(q_1-1)}K'_{q_1-1}\varphi;$$

comparons avec (38); il en résulte

$$H_{p_1q_1-q_1}(x, y) + \lambda_{p_1q_1-p_1-q_1}(x, y)\,\varphi_{p_1} = (x-\alpha_1)^{(p_1-1)(q_1-1)}K_{p_1-1},$$
$$\frac{H_{p_1q_1-q_1}(x, y)}{(x-\alpha_1)^{p_1q_1-q_1}} + \frac{\lambda_{p_1q_1-p_1-q_1}(x, y)}{(x-\alpha_1)^{p_1q_1-p_1-q_1}}\,\frac{\varphi_{p_1}(x, y)}{(x-\alpha_1)^{p_1}} = \frac{K_{p_1-1}(x, y)}{(x-\alpha_1)^{p_1-1}};$$

$\dfrac{\varphi}{(x-\alpha_1)^{p_1}}$, $\dfrac{K_{p_1-1}}{(x-\alpha_1)^{p_1-1}}$ étant finis, puisque φ, K_{p-1} ont respectivement un point multiple d'ordre p_1, $p_1 - 1$ en (α_1, β_1), il en résulte que $\dfrac{H(x, y)}{(x-\alpha_1)^{p_1q_1-q_1}}$, $\dfrac{\lambda(x, y)}{(x-\alpha_1)^{p_1q_1-p_1-q_1}}$ le sont aussi et que $H_{p_1q_1-q_1}(x, y)$, $\lambda_{p_1q_1-p_1-q_1}(x, y)$ *ont respectivement des points multiples d'ordres* $p_1q_1 - q_1$, $p_1q_1 - p_1 - q_1$ en (α_1, β_1), comme le rappelleront leurs indices, et de même en (α_2, β_2), ... Les polynomes $H_{p_1q_1-q_1}(x, y)$, $\lambda_{p_1q_1-p_1-q_1}(x, y)$ sont par conséquent de la forme

$$\begin{aligned}
H_{p_1q_1-q_1}(x, y) = {} & (x-\alpha_1)^{p_1q_1-q_1}A_0(x) + (x-\alpha_1)^{p_1q_1-q_1-1}(y-b_1)A_1(x)\\
& + (x-\alpha_1)^{p_1q_1-q_1-2}(y-\beta_1)^2A_2(x) + \ldots\\
& + (x-\alpha_1)(y-\beta_1)^{p_1q_1-q_1-1}A_{p_1q_1-q_1-1}(x)\\
& + (y-\beta_1)^{p_1q_1-q_1}A_{p_1q_1-q_1}(x) + (y-\beta_1)^{p_1q_1-q_1+1}A_{p_1q_1-q_1+1}(x) + \ldots,\\
\lambda_{p_1q_1-p_1-q_1}(x, y) = {} & (x-\alpha_1)^{p_1q_1-p_1-q_1}B_0(x) + (x-\alpha_1)^{p_1q_1-p_1-q_1-1}B_1(x) + \ldots\\
& + (x-\alpha_1)(y-\beta_1)^{p_1q_1-p_1-q_1-1}B_{p_1q_1-p_1-q_1-1}(x)\\
& + (y-\beta_1)^{p_1q_1-p_1-q_1}B_{p_1q_1-p_1-q_1}(x)\\
& + (y-\beta_1)^{p_1q_1-p_1-q_1+1}B_{p_1q_1-p_1-q_1+1}(x) + \ldots,
\end{aligned}$$

$\varphi_{p_1}(x, y)$ étant lui-même de la forme

$$\begin{aligned}
\varphi_{p_1}(x, y) = {} & (x-\alpha_1)^{p_1}C_0(x) + (x-\alpha_1)^{p_1-1}(y-\beta_1)C_1(x) + \ldots\\
& + (x-\alpha_1)(y-\beta_1)^{p_1-1}C_{p_1-1}(x) + (y-\beta_1)^{p_1}C_{p_1}(x)\\
& + (y-\beta_1)^{p_1+1}C_{p_1+1}(x) + \ldots;
\end{aligned}$$

$A_0(x)$, $A_1(x)$, ...; $B_0(x)$, $B_1(x)$, ...; $C_0(x)$, $C_1(x)$, ... sont des polynomes en x, qui ne sont soumis à aucune condition relativement au point (α_1, β_1).

Ces termes

$$(x-\alpha_1)^{p_1q_1-q_1}A_0(x),\qquad (x-\alpha_1)^{p_1q_1-q_1-1}(y-\beta_1)A_1(x),\qquad \ldots,$$
$$(x-\alpha_1)^{p_1q_1-q_1-p_1+1}(y-\beta_1)^{p_1-1}A_{p_1-1}\text{ de }\Pi$$

admettent le facteur $(x-\alpha_1)^{(p_1-1)(q_1-1)}$; il en est de même, dans le produit $\lambda\varphi$, des termes en $(x-\alpha_1)^{p_1q_1-q_1}$, $(x-\alpha_1)^{p_1q_1-q_1-1}$, ..., $(x-\alpha_1)^{p_1q_1-q_1-p_1-1}$; il reste donc à écrire que les termes en $(x-\alpha_1)^{p_1q_1-q_1-p_1}$ de $\Pi-\lambda\varphi$ sont divisibles par $(x-\alpha_1)^{p_1q_1-q_1-p_1+1}$, ..., ce qui permettra de déterminer comme il convient

$$B_0(x),\quad B_1(x),\quad \ldots.$$

Nous obtiendrons ainsi la forme intermédiaire (38); puis nous l'écrirons

$$\begin{aligned}(x-\alpha_1)^{p_1+q_1-1}(x-\alpha_2)^{p_2q_2}=\ldots=\quad&[K(x,y)+\mu(x,y)\varphi(x,y)]\psi(x,y)\\&+[K'(x,y)-\mu(x,y)\psi(x,y)]\varphi(x,y)\end{aligned}$$

et nous déterminerons $\mu(x,y)$, comme nous avons déterminé $\lambda(x,y)$, de manière à rendre

$$K(x,y)+\mu(x,y)\varphi(x,y)$$

divisible par $(x-\alpha_2)^{(p_2-1)(q_2-1)}$, et ainsi de suite, jusqu'à ce que nous arrivions à une identité

$$(x-\alpha_1)^{p_1+q_1-1}(x-\alpha_2)^{p_2+q_2-1}=\ldots=Q(x,y)\psi+Q'(x,y)\varphi,$$

où tous les facteurs du premier membre soient réduits à la forme $(x-\alpha_i)^{p_i+q_i-1}$.

29. La question que nous aurons à résoudre n'est qu'un cas particulier de celle qui vient d'être traitée, comme il a été dit plus haut.

Les identités équivalentes

$$\begin{aligned}(x-\alpha_1)^{p_1q_1}(x-\alpha_2)^{p_2q_2}=\ldots=\quad&[\Pi(x,y)+\lambda(x,y)\varphi]\psi\\&+[\Pi'(x,y)-\lambda(x,y)]\varphi,\\(x-\alpha_2)^{p_1+q_1-1}(x-\alpha_2)^{p_2+q_2-1}=\ldots=&\,Q(x,y)\psi+Q'(x,y)\varphi\end{aligned}$$

donnent lieu à celles-ci, dont nous aurons à nous servir,

$$(39)\qquad (x-\alpha_1)^{p_1q_1}(x-\alpha_2)^{p_2q_2}=\ldots=\Pi(x,y)\psi\qquad(\varphi=0),$$
$$(40)\qquad (x-\alpha_1)^{p_1+q_1-1}(x-\alpha_2)^{p_2+q_2-1}=\ldots=Q(x,y)\psi\qquad(\varphi=0),$$

qui supposent essentiellement que le point (x, y) est astreint à rester sur la courbe

$$\varphi(x, y) = 0.$$

Or, la réduction de (39) à (40) peut se faire directement.

1° Il est des cas où elle est immédiate. Par exemple, reprenons la relation (32); écrivons-la

$$2x^6(5x-3)(5x-4) = [2x^4(x+1)(-5x+7) - x^2(x+1)^2\psi]\psi \qquad (\varphi = 0);$$

on voit que le facteur x^2 apparaît de suite; en remplaçant ψ par sa valeur (31), on a

$$2x^4(5x-3)(5x-4) = [2x^2(x+1)(-5x+7) - (x+1)^2(x^2-5xy+6y^2)]\psi$$
$$(\varphi = 0),$$

ce qui est la relation (40).

2° D'ordinaire, quelques calculs, assez simples d'ailleurs, sont nécessaires. En voici un exemple, nous en rencontrerons d'autres plus loin.

La relation (32), où l'on suppose $\psi = 0$, donne lieu à celle-ci :

$$2x^6(5x-3)(5x-4) = [x^3(85x-59) - 36\varphi]\varphi \qquad (\psi = 0),$$

où il s'agit d'abaisser x^6 à x^4.

Tout d'abord, remplaçant φ par sa valeur (30) dans le [ ], on a

$$(41)\quad \left\{\begin{aligned} 2x^6(5x-3)(5x-4) &= [x^3(85x-59) - 36x(x+1)y^2 - 36x^3(x-1)]\varphi \\ &= x[x^2(49x-23) - 36(x+1)y^2]\varphi \\ &= x[x^2(49x-23) - 36(x+1)y^2 + \lambda(x, y)\psi(x, y)]\varphi \\ &= x\big[x^2(49x-23) - 36xy^2 \\ &\qquad + (\lambda(x, y)\psi(x, y) - 36y^2)\big]\varphi \end{aligned}\right\} \quad (\psi = 0).$$

Il s'agit, visiblement, de trouver une relation

$$\lambda(x, y)\psi(x, y) - 36y^2,$$

où x entre en facteur, *et nous savons à priori, par la théorie générale du n° 23, que cela est possible*. Dans le cas présent, il suffit de prendre

$$\lambda(x, y) = 6;$$

on aura

$$\lambda(x, y)\psi(x, y) - 36y^2 = -30xy + 6x^2;$$

(41) devient alors, en divisant par x^2,

$$(42)\quad 2x^4(5x-3)(5x-4)=[x(49x-23)-6(x+1)(5y-x)]\varphi \qquad (\psi=0).$$

Si nous comparons cette formule avec celle-ci

$$\begin{aligned}&2x^4(5x-3)(5x-4)\\&\quad=[2x^2(x+1)(-5x+7)-(x+1)^2(6y^2-5xy+x^2)\\&\qquad\qquad+6(x+1)(x^3+xy^2-x^2+y^2)]\psi(x,y)\\&\qquad+[x(85x-59)-6(5x^2+5xy-7x+5y)]\varphi(x,y),\end{aligned}$$

obtenue au n° **25**, nous devons retrouver (42) en faisant $\psi=0$ dans la précédente; il en est bien ainsi, car

$$x(85x-59)-6(5x^2+5xy-7x+5y)\equiv x(49x-23)-6(x+1)(5y-x).$$

FORMES DIVERSES DE LA FRACTION RATIONNELLE $\dfrac{\psi(x,y)}{\chi(x,y)}$.

30. Je puis maintenant donner la solution complète de la question suivante, qui joue un rôle *essentiel* dans la théorie des courbes gauches Γ, représentées par deux équations de la forme

$$(43)\qquad \varphi(x,y)=0,\qquad z=\frac{\psi(x,y)}{\chi(x,y)}:$$

quelles sont les conditions que doivent remplir les polynomes $\psi_1(x,y)$, $\chi_1(x,y)$ *pour que la courbe algébrique* Γ, *définie par le système* (43), *puisse être aussi représentée par le système*

$$(44)\qquad \varphi(x,y)=0,\qquad z=\frac{\psi_1(x,y)}{\chi_1(x,y)}?$$

Le cas où φ, ψ d'une part, ou bien φ, χ d'autre part, ont des contacts sera exclu de ce Mémoire (n° **22**), mais ψ, χ pourront avoir des contacts, et cela a une grande importance : la restriction imposée n'entraîne pas que Γ soit dépourvue des points singuliers qui peuvent correspondre aux contacts mutuels de ψ, χ (n° **20**).

La question que nous allons étudier a son origine dans cette

remarque : le système (43) est équivalent à celui-ci :

$$\varphi(x, y) = 0, \qquad z = \frac{\lambda(x, y)\psi(x, y) + \mu(x, y)\varphi(x, y)}{\lambda(x, y)\chi(x, y) + \nu(x, y)\varphi(x, y)},$$

où $\lambda(x, y)$, $\mu(x, y)$, $\nu(x, y)$ sont des polynomes arbitraires.

51. Considérons les trois courbes planes

$$\varphi(x, y) = 0, \qquad \psi(x, y) = 0, \qquad \chi(x, y) = 0.$$

On peut ranger leurs points communs dans les catégories suivantes :

1° Les points $(x = \alpha_i, y = \beta_i)$ communs à φ, ψ, mais où χ ne passe pas; nous les supposons multiples d'ordre p'_i pour φ, d'ordre q'_i pour ψ;

2° Les points $(x = \gamma_i, y = \delta_i)$ communs à φ, χ, où ψ ne passe pas, multiples d'ordres p''_i pour φ, r''_i pour χ;

3° Les points $(x = \varepsilon_i, y = \zeta_i)$, communs à φ, ψ, χ, multiples d'ordres p_i pour φ, q_i pour ψ, r_i pour χ.

Les points communs à ψ, χ, où φ ne passe pas, sont sans intérêt ici.

On suppose, comme précédemment, que les axes Ox, Oy sont orientés de telle sorte qu'une même parallèle à Oy ne passe que par un seul des points communs à φ, ψ ou un seul des points communs à φ, χ ou à φ, ψ, χ. Les conclusions montreront que c'est au point de vue des calculs pratiques, seul, que Ox, Oy doivent être ainsi choisis. Notons cette conséquence : la droite $x = \varepsilon_i$ recoupe φ en des points $(\varepsilon_i, \zeta_{ij})$ qui n'appartiennent ni à ψ, ni à χ.

52. Soit le polynome

$$M(x, y)\psi(x, y) + A(x, y)\varphi(x, y),$$

où $M(x, y)$, $A(x, y)$ sont arbitraires, sauf les conditions suivantes : $M(x, y)$ a en chacun des points (α_i, β_i) un point multiple [1] d'ordre $p'_i - 1$ et en chacun des points (ε_i, ζ_i) un point multiple d'ordre $p_i - 1$; $A(x, y)$ a en (α_i, β_i) un point multiple d'ordre $q'_i - 1$ et en (ε_i, ζ_i) un point multiple d'ordre $q_i - 1$. Le polynome

$$f(x, y) = M\psi + A\varphi + \lambda(x, y)(x - \alpha_1)^{p'_1+q'_1-1}(x - \alpha_2)^{p'_2+q'_2-1}\ldots$$
$$\times (x - \varepsilon_1)^{p_1+q_1-1}(x - \varepsilon_2)^{p_2+q_2-1}\ldots.$$

---

[1] *Cf.* note [1], n° 9.

où $\lambda(x, y)$ est quelconque, sauf qu'il ne passe en aucun des points (α_i, β_i), (ε_i, ζ_i), a donc un point multiple d'ordre $p'_i + q'_i - 1$ en (α_i, β_i), un point multiple d'ordre $p_i + q_i - 1$ en (ε_i, ζ_i) et peut (n° **22**) être mis sous la forme

$$M_1\psi + A_1\varphi;$$

il en résulte

$$\lambda(x, y)(x-\alpha_1)^{p'_1+q'_1-1}(x-\alpha_2)^{p'_2+q'_2-1}\ldots(x-\varepsilon_1)^{p_1+q_1-1}(x-\varepsilon_2)^{p_2+q_2-1}\ldots$$
$$= (M_1 - M)\psi + (A_1 - A)\varphi$$

ou

$$(45)\quad \lambda(x, y)(x-\alpha_1)^{p'_1+q'_1-1}(x-\alpha_2)^{p'_2+q'_2-1}\ldots(x-\varepsilon_1)^{p_1+q_1-1}(x-\varepsilon_2)^{p_2+q_2-1}\ldots$$
$$= Q(x, y)\psi + Q'(x, y)\varphi,$$

et l'on sait que $Q(x, y)$ a un point multiple d'ordre $p'_i - 1$ en (α_i, β_i), un point multiple d'ordre $p_i - 1$ en (ε_i, ζ_i) (n° **22**).

De même

$$(46)\quad \lambda(x, y)(x-\gamma_1)^{p''_1+q''_1-1}(x-\gamma_2)^{p''_2+q''_2-1}\ldots(x-\varepsilon_1)^{p_1+\varepsilon_1-1}(x-\varepsilon_2)^{p_2+\varepsilon_2-1}\ldots$$
$$= P(x, y)\chi + P'(x, y)\varphi.$$

où $P(x, y)$ a un point multiple d'ordre $p''_i - 1$ en (γ_i, δ_i), un point multiple d'ordre $p_i - 1$ en (ε_i, ζ_i).

Les *caractéristiques* des divers polynomes en jeu sont indiquées dans le Tableau suivant. Nous y ajoutons celles de deux polynomes P_1, Q_1, dont il va être question :

(T)

	(α_i, β_i).	(γ_i, δ_i).	(ε_i, ζ_i).
φ	p'_i	p''_i	p_i
ψ	q'_i	0	q_i
χ	0	r''_i	r_i
M	$p'_i - 1$	0	$p_i - 1$
A	$q'_i - 1$	0	$q_i - 1$
$M\psi + A\varphi$	$p'_i + q'_i - 1$	0	$p_i + q_i - 1$
f	$p'_i + q'_i - 1$	0	$p_i + q_i - 1$
λ	0	0	0
M_1	$p'_i - 1$	0	$p_i - 1$
A_1	$q'_i - 1$	0	$q_i - 1$
P	0	$p''_i - 1$	$p_i - 1$
Q	$p'_i - 1$	0	$p_i - 1$
P_1	0	$p''_i - 1$	$p_i - 1$
Q_1	$p'_i - 1$	0	$p_i - 1$

Il résulte de (45) et (46) que

$$\frac{\psi(x,y)}{\chi(x,y)} = \frac{(x-\alpha_1)^{p'_1+q'_1-1}(x-\alpha_1)^{p'_2+q'_2-1}\ldots(x-\varepsilon_1)^{q_1}(x-\varepsilon_2)^{q_2}\ldots P(x,y)}{(x-\gamma_1)^{p''_1+q''_1-1}(x-\gamma_2)^{p''_2+q''_2-1}\ldots(x-\varepsilon_1)^{r_1}(x-\varepsilon_2)^{r_2}\ldots Q(x,y)}$$

$$(\varphi = 0),$$

ψ_1 et χ_1 sont donc de la forme

$$\psi_1(x,y) = (x-\alpha_1)^{p'_1+q'_1-1}(x-\alpha_2)^{p'_2+q'_2-1}\ldots(x-\varepsilon_1)^{q_1}(x-\varepsilon_2)^{q_2}\ldots P(x,y),$$
$$\chi_1(x,y) = (x-\gamma_1)^{p''_1+q''_1-1}(x-\gamma_2)^{p''_2+q''_2-1}\ldots(x-\varepsilon_1)^{r_1}(x-\varepsilon_2)^{r_2}\ldots Q(x,y).$$

D'après leur formation, les polynomes P, Q sont, dans une certaine mesure, arbitraires. Démontrons la proposition *fondamentale* que voici :

On peut prendre pour $\psi_1(x,y)$, $\chi_1(x,y)$ deux polynomes de la forme

$$\psi_1(x,y) = (x-\alpha_1)^{p'_1+q'_1-1}\ldots(x-\varepsilon_1)^{q_1}\ldots P_1(x,y),$$
$$\chi_1(x,y) = (x-\gamma_1)^{p''_1+q''_1-1}\ldots(x-\varepsilon_1)^{r_1}\ldots Q_1(x,y),$$

sous condition que $P_1(x,y)$, $Q_1(x,y)$ soient définis comme il suit : l'un des deux polynomes $P_1(x,y)$, $Q_1(x,y)$ est arbitraire parmi les polynomes $P_1(x,y)$ qui ont des points multiples d'ordres $p''_i - 1$ en (γ_i, δ_i), $p_i - 1$ en (ε_i, ζ_i) et les polynomes $Q_1(x,y)$ qui ont des points multiples d'ordres $p'_i - 1$ en (α_i, β_i), $p_i - 1$ en (ε_i, ζ_i), conformément aux caractéristiques du Tableau T.

Soient P, Q deux polynomes vérifiant l'identité

$$(47)\quad (x-\varepsilon_1)^{p_1+r_1-1}(x-\varepsilon_2)^{p_2+r_2-1}\ldots(x-\gamma_1)^{p''_1+r'_1-1} = \ldots = P\chi + P'\varphi,$$

que nous savons former.

Soit

$$(48)\qquad \begin{array}{ll} q_1 > r_1, & q_2 < r_2, \\ q_1 = r_1 + s_1, & q_2 = r_2 - s_2; \end{array}$$

multiplions les deux membres de (47) par ψQ_1; on a

$$(49)\qquad \begin{aligned} &(x-\varepsilon_1)^{p_1+r_1-1}(x-\varepsilon_2)^{p_2+r_2-1}\ldots(x-\gamma_1)^{p''_1+r'_1-1}\ldots\psi Q_1 \\ &= (P\psi Q_1)\chi + (P'\psi Q_1)\varphi. \end{aligned}$$

Le polynome ψ a un point multiple d'ordre q_1 en (ε_1, ζ_1), un point

multiple d'ordre q_2 en (ε_2, ζ_2), ... et ne passe pas en (γ_1, δ_1) ..., comme le rappelle le Tableau T; Q_1 a un point multiple d'ordre $p_1 - 1$ en (ε_1, ζ_1), un point multiple d'ordre p_2 en (ε_2, ζ_2) et ne passe pas en (γ_1, δ_1) [1] ....

D'autre part, en raison des caractéristiques, qu'on vient de rappeler, de ψ, Q_1, l'expression

$$(x-\gamma_1)^{p_1''+r_1''-1}\ldots(x-\varepsilon_2)^{s_2}\psi Q_1,$$

d'où le facteur $x - \varepsilon_1$ est exclu, a un point multiple d'ordre $p_1'' + r_1'' - 1$ en (γ_1, δ_1), ..., un point multiple d'ordre $p_1 + q_1 - 1 > p_1 + r_1 - 1$, (48) en (ε_1, ζ_1), un point multiple d'ordre $p_1 + q_2 + s_2 - 1$, ou (48) $p_2 + r_2 - 1$ en (ε_2, ζ_2), ... et peut, en conséquence, être mise sous la forme

$$(x-\gamma_1)^{p_1''+r_1''-1}\ldots(x-\varepsilon_2)^{s_2}\psi Q_1 = H\chi + H'\varphi;$$

cela permet d'écrire (49)

$$(x-\varepsilon_1)^{p_1+r_1-1}(x-\varepsilon_2)^{p_2+q_2-1}\ldots(H\chi + H'\varphi) = (P\psi Q_1)\chi + (P'\psi Q_1)\varphi,$$

où, en raison de (48), $(x-\varepsilon_2)^{p_2+r_2-1}$ a été départagé en deux facteurs

$$(x-\varepsilon_2)^{p_2+q_2-1}(x-\varepsilon_2)^{s_2}.$$

Il en résulte l'identité suivante :

$$\begin{aligned}&[(x-\varepsilon_1)^{p_1+r_1-1}(x-\varepsilon_2)^{p_2+q_2-1}\ldots H - P\psi Q_1]\chi\\ &\quad + [(x-\varepsilon_1)^{p_1+r_1-1}(x-\varepsilon_2)^{p_2+q_2-1}\ldots H' - P'\psi Q_1]\varphi = 0.\end{aligned}$$

Le polynome φ n'ayant pas de facteurs communs avec χ, on peut le supposer; divise

$$(x-\varepsilon_1)^{p_1+r_1-1}(x-\varepsilon_2)^{p_2+q_2-1}\ldots H - P\psi Q_1$$

qui se trouve être de la forme $K'\varphi$, d'où

$$P\psi Q_1 = (x-\varepsilon_1)^{p_1+r_1-1}(x-\varepsilon_2)^{p_2+q_2-1}\ldots H - K'\varphi.$$

---

[1] Si Q_1 a un produit multiple en (γ_1, δ_1), les conclusions que nous allons trouver ne sont pas modifiées. Cette particularité sera rappelée au n° **35**.

Portons cette valeur de $P\psi Q_1$ dans (49); il vient

$$(50)\qquad \begin{aligned}&(x-\varepsilon_1)^{p_1+r_1-1}(x-\varepsilon_2)^{p_2+r_2-1}\ldots(x-\gamma_1)^{p'_1+r'_1-1}\ldots\psi Q_1\\ &=(x+\varepsilon_1)^{p_1+r_1-1}(x-\varepsilon_2)^{p_2+q_2-1}\ldots H\chi+(P'\psi Q_2-K'\chi)\varphi;\end{aligned}$$

on a, par hypothèse, $q_2<r_2$; donc

$$(x-\varepsilon_1)^{p_1+r_1-1}(x-\varepsilon_2)^{p_2+q_2-1}\ldots$$

divise le premier membre de (50) *et divise*, par conséquent,

$$(P'\psi Q_2-K'\chi)\varphi.$$

Or, φ qui ne s'annule pour $x=\varepsilon_1$ qu'aux points (ε_1, ζ_1) et $(\varepsilon_1, \zeta_{1j})$ où la droite $x=\varepsilon_1$ coupe φ, qui ne s'annule de même pour $x=\varepsilon_2$ qu'aux points (ε_2, ζ_2), $(\varepsilon_2, \zeta_{2j})$ où la droite $x=\varepsilon_2$ coupe φ, etc. n'est pas divisible par

$$(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)\ldots;$$

c'est donc que

$$P'\psi Q_2-K'\chi$$

est divisible par $(x-\varepsilon_1)^{p_1+r_1-1}(x-\varepsilon_2)^{p_2+q_2-1}\ldots$ *et se trouve être de la forme*

$$P'\psi Q_2-K'\chi=(x-\varepsilon_1)^{p_1+r_1-1}(x-\varepsilon_2)^{p_2+q_2-1}\ldots K(x,y),$$

et cela permet d'écrire (50)

$$(x-\varepsilon_2)^{r_2-q_2}\ldots(x-\gamma_1)^{p'_1+r'_1-1}\ldots\psi Q_1=H(x,y)\chi+K(x,y)\varphi;$$

il n'est d'ailleurs pas possible de pousser la réduction plus loin.

Il en résulte, dans l'hypothèse de $\varphi=0$,

$$\begin{aligned}\frac{\psi(x,y)}{\chi(x,y)}&=\frac{H(x,y)}{(x-\gamma_1)^{p'_1+r'_1-1}\ldots(x-\varepsilon_2)^{r_2-q_2}\ldots Q_1(x,y)}\qquad(\varphi=0),\\ &=\frac{(x-\varepsilon_1)^{r_1}(x-\varepsilon_2)^{q_2}\ldots H(x,y)}{(x-\gamma_1)^{p'_1+r'_1-1}\ldots(x-\varepsilon_1)^{r_1}(x-\varepsilon_2)^{r_2}\ldots Q_1(x,y)}\qquad(\varphi=0)\end{aligned}$$

et

$$(51)\qquad \chi_1(x,y)=(x-\gamma_1)^{p'_1+r'_1-1}\ldots(x-\varepsilon_1)^{r_1}(x-\varepsilon_2)^{r_2}\ldots Q_1(x,y),$$

où $Q_1(x,y)$ *est simplement assujetti à avoir les caractéristiques du Tableau* V.

On pourrait faire des calculs analogues sur l'identité

$$(x-\alpha_1)^{p'_1+q'_1-1}(x-\alpha_2)^{p'_2+q'_2-1}\ldots(x-\varepsilon_1)^{p_1+q_1-1}(x-\varepsilon_2)^{p_2+q_2-1}\ldots$$
$$=Q(x,y)\psi+Q'(x,y)\varphi,$$

dont on aurait multiplié les deux membres par χP_1, P_1 ayant les caractéristiques énoncées au début, et cela montrerait que $\psi_1(x,y)$ est lui-même de la forme

$$(52)\qquad \psi_1(x,y)=(x-\alpha_1)^{p'_1+q'_1-1}\ldots(x-\varepsilon_1)^{q_1}(x-\varepsilon_2)^{q_2}\ldots P_1(x,y).$$

Remarques. — I. *La marche des calculs montre que les conditions énoncées pour ψ_1, χ_1 sont nécessaires et suffisantes.*

II. Les polynomes ψ_1, χ_1 étant liés par la relation

$$\frac{\psi}{\chi}=\frac{\psi_1}{\chi_1}\qquad(\varphi=0),$$

un seul des deux polynomes ψ_1, χ_1 est arbitraire, dans les conditions fixées.

III. Si $q_1>r_1$, $q_2<r_2$, on prendra

$$(53)\qquad \chi_1(x,y)=(x-\gamma_1)^{p''_1+r''_1-1}\ldots(x-\varepsilon_2)^{r_2-q_2}\ldots Q_1(x,y),$$
$$(54)\qquad \psi_1(x,y)=(x-\alpha_1)^{p'_1+q'_1-1}\ldots(x-\varepsilon_1)^{r_1-q_1}\ldots P_1(x,y).$$

IV. Il n'est pas inutile d'écrire

$$\psi\chi_1=\psi_1\chi$$

ou (51, 52)

$$\psi(x-\gamma_1)^{p''_1+r''_1-1}\ldots(x-\varepsilon_1)^{r_1}\ldots Q_1=(x-\alpha_1)^{p'_1+q'_1-1}\ldots(x-\varepsilon_1)^{q_1}\ldots P_1\chi,$$

puis

$$\frac{\psi}{(x-\alpha_1)^{q_1}}(x-\gamma_1)^{p''_1+r''_1-1}\ldots(x-\varepsilon_1)^{r_1}\ldots\frac{Q_1}{(x-\alpha_1)^{p'_1-1}}=\ldots(x-\varepsilon_1)^{q_1}\ldots P_1\chi,$$

$$\psi\ldots(x-\varepsilon_1)^{r_1}\ldots Q_1=(x-\alpha_1)^{p'_1+q'_1-1}\ldots(x-\varepsilon_1)^{q_1}\ldots\frac{P_1}{(x-\gamma_1)^{p''_1-1}}\,\frac{\chi}{(x-\gamma_1)^{r''_1}},$$

$$\frac{\psi}{(x-\varepsilon_1)^{q_1}}(x-\gamma_1)^{p''_1+r''_1-1}\ldots\frac{Q_1}{(x-\varepsilon_1)^{p_1-1}}=(x-\alpha_1)^{p'_1+q'_1-1}\ldots\frac{P_1}{(x-\varepsilon_1)^{p_1-1}}\,\frac{\chi}{(x-\varepsilon_1)^{r_1}},$$

et de constater que, conformément aux caractéristiques du Tableau T, tous les termes de la première identité sont finis en (α_1, β_1), tous ceux de la seconde en (γ_1, δ_1), et ceux de la troisième en (ε_1, ζ_1).

V. On pourrait démontrer la deuxième partie en supposant, dès le début, $\varphi = 0$ (n° **42**); mais on masquerait ainsi certains points intéressants.

53. Cas particuliers. — I. *Si la courbe gauche* Γ *n'a pas de points à l'infini dans la direction* Oz, les points $(\gamma_i \delta_i)$ n'existent pas; de plus,

$$q_i \geqq r_i;$$

donc (53), $\chi_1(x, y)$ se réduit à

$$\chi_1(x, y) = Q_1(x, y):$$

la courbe χ_1 *est alors quelconque parmi celles qui ont en* (α_i, β_i) *un point multiple d'ordre* $p_i - 1$; *en* ε_i, ζ_i, *un point multiple d'ordre* $p_i - 1, \ldots$.

II. *Si la courbe gauche* Γ *a des points à l'infini dans la direction* Oz, *mais n'a pas de points singuliers vrais, les points* (α_i, β_i) *sont simples pour* φ (n° **21**); donc (53)

$$\chi_1 = (x - \gamma_1)^{p''_1 + r''_1 - 1} \ldots (x - \varepsilon_2)^{r_2 - q_2} \ldots Q_1(x, y),$$

où (Tableau T), Q_1 *est simplement assujetti à avoir en* (ε_i, ζ_i) *un point multiple d'ordre* $p_i - 1$.

III. Théorème d'Halphen. — *Si l'on suppose que la courbe* Γ *n'a ni points à l'infini dans la direction* Oz *ni points singuliers vrais et, en outre, que* φ *n'a pas d'autres singularités que des points doubles*, on voit, en réunissant les résultats qu'on vient d'obtenir (II, III) où l'on fait, de plus, $p_1 = 2$, *que* χ_1 *est alors une courbe quelconque, simplement assujettie à avoir comme points simples les points doubles de* φ *où passent* ψ, χ.

En effet, dans l'expression de χ_1 écrite (II), les points $(\gamma_1 \delta_1)$

n'existent pas, non plus que les points (ε_2, ζ_2) où $r_2 > q_2$; puis $Q_1(x, y)$ est simplement assujetti à avoir comme points *simples* les points $(\varepsilon_1 \zeta_1)$ où $r_1 > q_1$, puisque ces points sont *doubles* pour φ; enfin il n'y a pas lieu de tenir compte pour Q_1 des points (α, β) qui sont simples pour φ.

C'est ce dernier résultat qu'Halphen a pris comme point de départ de son étude des courbes gauches algébriques [1].

Formes spéciales que peut prendre $\chi_1(x, y)$.

54. Les calculs que nous avons faits permettent de prendre

$$Q_1(x, y) = (x - \alpha_1)^{p'_1 - 1} \ldots (x - \varepsilon_1)^{p_1 - 1} \ldots.$$

Dans ces conditions

$$\frac{\psi(x, y)}{\chi(x, y)} = \frac{(x - \alpha_1)^{p'_1 + q'_1 - 1} \ldots (x - \varepsilon_1)^{q_1} \ldots P_1(x, y)}{(x - \gamma_1)^{p''_1 + r''_1 - 1} \ldots (x - \varepsilon_1)^{r_1} \ldots (x - \alpha_1)^{p'_1 - 1} \ldots (x - \varepsilon_1)^{p_1 - 1} \ldots} \qquad (\varphi = 0)$$

ou, après disparition des facteurs communs,

$$\frac{\psi(x, y)}{\chi(x, y)} = \frac{(x - \alpha_1)^{q'_1} \ldots (x - \varepsilon_1)^{q_1} \ldots}{(x - \gamma_1)^{p''_1 + r''_1 - 1} \ldots (x - \varepsilon_1)^{p_1 + r_1 - 1}} P_1(x, y) \qquad (\varphi = 0);$$

la fraction rationnelle $\frac{\psi(x, y)}{\chi(x, y)}$ est ainsi ramenée au produit d'une fraction rationnelle en x par un polynome en (x, y).

Voici une conséquence intéressante de cette forme particulière de $\frac{\psi}{\chi}$.

D'après le Tableau (T),

$$\frac{P_1(x, y)}{(x - \gamma_1)^{p''_1 - 1}}$$

est fini en (γ_1, δ_1); pour que

$$\left[\frac{P_1(x, y)}{(x - \gamma_1)^{p''_1 + r''_1 - 1}}\right]_{\gamma_1, \delta_1}$$

soit fini, il faut que r''_1 soit nul.

---

[1] Halphen, *loc. cit.*, n° 3.

Cela implique que les points (γ_i, δ_i) communs à φ, ψ, mais où χ ne passe pas, n'existent pas.

D'autre part, pour un point ε_i, commun à φ, ψ, χ, on a

$$\left[\frac{(x-\varepsilon_i)^{q_i} P_1(x, y)}{(x-\varepsilon_i)^{p_i+r_i-1}}\right]_{\varepsilon_i, \zeta_i} = \left[\frac{(x-\varepsilon_i)^{q_i}}{(x-\varepsilon_i)^{r_i}} \frac{P_1(x, y)}{(x-\varepsilon_i)^{p_i-1}}\right]_{\varepsilon_i, \zeta_i},$$

où $\left[\frac{P_1(x, y)}{(x-\varepsilon_i)^{p_i-1}}\right]_{\varepsilon_i, \zeta_i}$ est fini; l'expression écrite sera donc finie si, condition nécessaire et suffisante,

$$q_i \geqq r_i.$$

Examinons les points $(\varepsilon_i, \zeta_{ij})$ où la droite $x = \varepsilon_i$ recoupe φ, et qui comptent parmi les systèmes de valeurs que peuvent prendre (x, y).

Un tel point $(\varepsilon_i, \zeta_{ij})$ ne peut être que simple pour φ (n° **31**); pour que $\left[\frac{P_1(x, y)}{(x-\varepsilon_i)^{p_i-1}}\right]_{\varepsilon_i, \zeta_{ij}}$ soit fini, il faut que $P_1(x, y)$ admette $(\varepsilon_i, \zeta_{ij})$ pour point multiple d'ordre $p_i - 1$, si φ et P_1 n'ont pas de contact en ce point (n° **9**).

Finalement, *les fractions rationnelles* $\frac{\psi(x, y)}{\chi(x, y)}$ *de* x *et* y, *où* x *et* y *sont liées par l'équation* $\varphi(x, y) = 0$ (φ *et* ψ, φ *et* χ *n'ayant pas de contacts*) *qui restent finies pour toutes les valeurs finies de* x *et de* y, *peuvent être mises sous la forme*

$$(x-\varepsilon_1)^{s_1}(x-\varepsilon_2)^{s_2}\ldots(x-\varepsilon_d)^{s_d}\frac{P_1(x, y)}{(x-\varepsilon_1)^{p_1-1}\ldots(x-\varepsilon_d)^{p_d-1}}$$
$$(s_1, s_2, \ldots, s_d \geqq 0),$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_d$ *étant les abscisses des points de multiplicité* $p_1, p_2, \ldots, p_d$ *de* φ *et* $P(x, y)$ *étant un polynome qui admet les points* (ε_i, ζ_i), $(\varepsilon_i, \zeta_{ij})$, ... *comme points multiples d'ordre* $p_i - 1$ [1] : on suppose qu'il n'y a pas de contact en $(\varepsilon_i, \zeta_{ij})$ entre φ, P_1; s'il y a contact, cette proposition est aisée à généraliser (n° **9**).

---

[1] Ce théorème est donné, quand $\varphi(x, y)$ n'a que des points doubles, dans E. Picard et G. Simart, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes*, t. II, p. 11.

55. Si $\varphi(x, y)$ a un point multiple (θ, η) d'ordre s, on a

$$\varphi(x, y) = \varepsilon_{s,1}(x-\theta)^s + \varepsilon_{s,2}(x-\theta)^{s-1}(y-\eta) + \ldots,$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = s\varepsilon_{s,1}(x-\theta)^{s-1} + (s-1)\varepsilon_{s,2}(x-\theta)^{s-2}(y-\eta) + \ldots,$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \varepsilon_{s,2}(x-\theta)^{s-1} + \ldots,$$

ce qui montre que les courbes $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0$ ont chacune un point multiple d'ordre $s-1$ en (θ, η).

De plus, en rendant $\varphi(x, y)$ homogène au moyen d'une variable z, on a

$$x\frac{\partial\varphi}{\partial x} + y\frac{\partial\varphi}{\partial y} + z\frac{\partial\varphi}{\partial z} = m\,\varphi(x, y, z),$$

où m est le degré de la courbe $\varphi(x, y) = 0$; donc

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = m\,\varphi(x, y) - x\frac{\partial\varphi}{\partial x} - y\frac{\partial\varphi}{\partial y},$$

$$\frac{\frac{\partial y}{\partial z}}{(x-\theta)^{s-1}} = m\frac{\varphi(x, y)}{(x-\theta)^{s-1}} - x\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}{(x-\theta)^{s-1}} - y\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial y}}{(x-\theta)^{s-1}}.$$

La courbe φ ayant un point multiple d'ordre s en (θ, η), $m\frac{\varphi(x, y)}{(x-\theta)^{s-1}}$ tend vers zéro quand (x, y) tend vers (θ, η), cependant que

$$\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}{(x-\theta)^{s-1}}, \quad \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial y}}{(x-\theta)^{s-1}}$$

tendent vers des limites finies, puique (θ, η) est un point multiple d'ordre $s-1$ pour $\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}$.

Il en résulte que

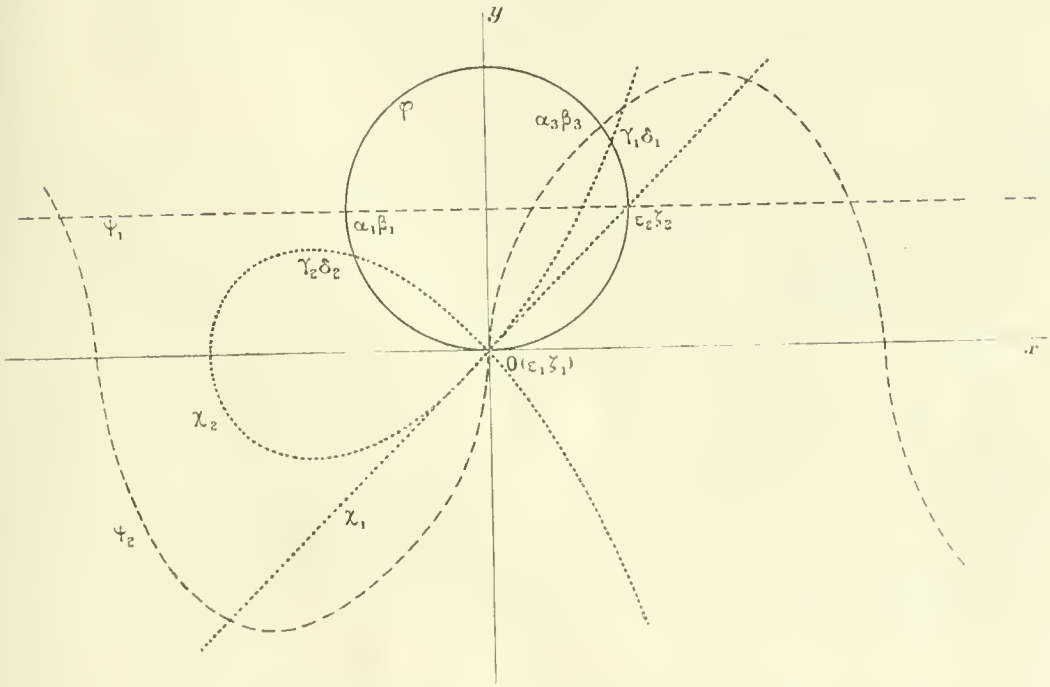
$$\left[\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial z}}{(x-\theta)^{s-1}}\right]_{\theta,\eta}$$

est fini; donc $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ a un point multiple d'ordre $s-1$ en (θ, η).

Les polaires $\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}$ *de* $\varphi(x, y, z)$, *ont donc toutes trois pour*

caractéristiques (Tableau T) $p'_i - 1$, $p''_i - 1$, $p_i - 1$ *et l'une quelconque d'entre elles, indifféremment, peut être prise pour* P_1 *ou* Q_1 [1].

36. Il ne sera pas inutile de donner un exemple des réductions qui



viennent d'être indiquées et de la manière pratique de conduire à bien les calculs compliqués qu'elles comportent.

Considérons la courbe gauche Γ définie par les équations

$$(55)\qquad \left\{\begin{array}{l} x^2+y^2-y=0 \\ z=\dfrac{(2y-1)(x^3+y^3-2x)}{(x-y)[x(x^2+y^2)+x^2-y^2]}. \end{array}\right.$$

Ici

$$(56)\qquad \varphi(x,y)=x^2+y^2-y,$$

$$(57)\qquad \psi(x,y)=(2y-1)(x^3+y^3-2x),$$

$$(58)\qquad \chi(x,y)=(x-y)[x(x^2+y^2)+x^2-y^2].$$

---

(1) *Cf.* la seconde Note du n° **32**.

La courbe φ est une circonférence tangente à Ox; son centre a pour coordonnées o et $\frac{1}{2}$.

La courbe ψ est formée de la droite $\psi_1 = 2y - 1 = 0$ et d'une courbe ψ_2 symétrique par rapport à l'origine, où elle a un point simple; elle y est tangente à Oy.

La courbe χ est formée de la droite $\chi_1 = y - x = 0$ et d'une strophoïde χ_2 ayant un point double à l'origine : χ a donc un point triple à l'origine.

57. On verra plus loin (n° **44**) que la courbe Γ est formée par une courbe gauche du sixième ordre, complétée par deux droites parallèles à Oz. Elle n'a pas de points singuliers, ni vrais, ni apparents, puisque φ n'a que des points simples; mais elle a des points à l'infini dans la direction Oz, se projetant en (γ_1, δ_1), (γ_2, δ_2), n° **41**, 2°, et en (ε_1, ζ_1), n° **41**, 3°. Nous sommes ainsi dans le cas II du n° **55**.

58. *Résultant de* φ, ψ. — Éliminons y entre

$$x^2 + y^2 - y = 0 \qquad (y^2 = y - x^2), \tag{59}$$

$$(2y - 1)(x^3 + y^3 - 2x) = 0, \tag{60}$$

en procédant comme il suit, en vue des calculs à venir; transformons (60) en tenant compte de (59) :

$$(2y - 1)[x^3 + y(y - x^2) - 2x] = 0 \qquad (\varphi = 0, \psi = 0),$$

$$(2y - 1)[x^3 - x^2 - 2x + y(1 - x^2)] = 0 \qquad (\varphi = 0, \psi = 0),$$

$$2y(x^3 - x^2 - 2x) + 2(y - x^2)(1 - x^2) - x^3 + x^2 + 2x - y(1 - x^2) = 0$$
$$(\varphi = 0, \psi = 0),$$

$$y(2x^3 - 3x^2 - 4x + 1) + 2x^4 - x^3 - x^2 + 2x = 0 \qquad (\varphi = 0, \psi = 0); \tag{61}$$

on peut tirer y de cette équation et porter dans (59); il vient, après réduction et décomposition en facteurs,

$$x(x + 1)^2(4x^2 - 1)(2x^3 - 7x^2 + 8x - 2) = 0 \qquad (\varphi = 0, \psi = 0).$$

On sait que le premier membre de cette équation n'est autre que le résultant $R(\varphi, \psi)$ de φ, ψ; donc

$$R(\varphi, \psi) = x(x + 1)^2(4x^2 - 1)(2x^3 - 7x^2 + 8x - 2). \tag{62}$$

59. *Résultant de* φ, χ. — En procédant comme pour φ, ψ, on a

$$(x-y)[xy+x^2-(y-x^2)]=0 \qquad (\varphi=0,\ \chi=0),$$

$$(x-y)[2x^2+(x-1)y]=2x^3+x(x-1)y-2x^2y-(x-1)y^2=0$$
$$(\varphi=0,\ \chi=0),$$

$$2x^3-x(x+1)y-(x-1)(y-x^2)=0 \qquad (\varphi=0,\ \chi=0),$$

(63) $$x^2(3x-1)-y(x^2+2x-1)=0, \qquad (\varphi=0,\ \chi=0);$$

la valeur de y, que donne cette équation, portée dans (59) conduit à

(64) $$R(\varphi,\chi)=x^3(2x-1)(5x^2-1) \qquad (\varphi=0,\ \chi=0).$$

40. *Formation de la relation*

(65) $$R(\varphi,\chi)-H(x,y)\chi-H'(x,y)\varphi=0$$

ou, plus simplement de celle-ci, *qu'il suffit de connaître*,

(66) $$R(\varphi,\chi)-H(x,y)\chi=0 \qquad (\varphi=0).$$

Nous pourrions obtenir (65) en éliminant y entre

$$x^2+y^2-y-\varphi=0, \qquad (x-y)[x(x^2+y^2)+x^2-y^2]-\chi=0,$$

comme il a été dit au n° **24**. Nous obtiendrons donc (66) en éliminant y entre

(67) $$x^2+y^2-y=0,$$

et

(68) $$(x-y)[x(x^2+y^2)+x^2-y^2]=\chi.$$

Le calcul a été fait en partie au n° **59**, sauf qu'au lieu de (63), il faut écrire

$$x^2(3x-1)-y(x^2+2x-1)=\chi \qquad (\varphi=0).$$

Tirons y, portons dans (67), il vient

$$x^2(x^2+2x-1)^2+[x^2(3x-1)-\chi]^2-[x^2(3x-1)-\chi](x^2+2x-1)=0$$
$$(\varphi=0).$$

Le terme indépendant de χ est $R(\varphi,\chi)$, *déjà calculé;* on a ainsi, en développant,

$$R(\varphi,\chi)-[2x^2(3x-1)-x^2-2x+1-\chi]\chi=0 \qquad (\varphi=0);$$

si l'on remplace, *dans le* [ ], χ par sa valeur (68), il vient

$$(69)\quad R(\varphi,\chi)=\{6x^3-3x^2-2x+1 \\ -(x-y)[x(x^2+y^2)-x^2-y^2]\}\chi=0 \qquad (\varphi=0),$$

ce qui est la relation (66).

Nous verrons, au n° **41**, que nous n'avons pas à former la relation (40), car (39) que nous venons d'obtenir en (69) lui est équivalente, dans le cas présent. Mais il importe de réduire (69), en se servant de (67) pour faire disparaître y^3 et y^2. On remarquera à cet effet que, dans le calcul de $R(\varphi,\chi)$, on a écrit (63)

$$(x-y)[x(x^2+y^2)-x^2-y^2]=x^2(3x-1)-y(x^2+2x-1) \qquad (\varphi=0);$$

donc (69) la relation (66) est ici

$$(70)\quad R(\varphi,\chi)=[6x^3-3x^2-2x+1-x^2(3x-1)+y(x^2+2x-1)]\chi \quad (\varphi=0),$$
$$=[3x^3-2x^2-2x+1+y(x^2+2x-1)]\chi \qquad (\varphi=0).$$

41. *Points communs à* φ, ψ (χ exclu), φ, χ (ψ exclu), (φ, ψ, χ). — Les expressions (62) et (64) de $R(\varphi,\psi)$, $R(\varphi,\chi)$ font voir que :

1° Les courbes φ, ψ (χ exclu) ont en commun les points d'abscisses

$$\alpha_1=-\frac{1}{2}, \qquad \alpha_2=-1$$

et α_3, α_4, α_5 racines de l'équation

$$2x^3-7x^2+8x-2=0;$$

pour ces points

$$p'_1=p'_2=p'_3=p'_4=p'_5=1,$$
$$q'_1=q'_2=q'_3=q'_4=p'_5=1;$$

on aurait leurs ordonnées en calculant le résultant, par rapport à x, de (59, 60).

2° Les courbes φ, χ (ψ exclu) ont en commun les points d'abscisses

$$\gamma_1=\frac{\sqrt{5}}{5}, \qquad \gamma_2=-\frac{\sqrt{5}}{5};$$

ici,

$$p''_1=p''_2=1, \qquad r''_1=r''_2=1$$

3° Les courbes φ, ψ, χ ont en commun les points d'abscisses

$$\varepsilon_1 = 0, \qquad \varepsilon_2 = \frac{1}{2}$$

pour lesquels

$$p_1 = p_2 = 1; \qquad q_1 = q_2 = 1; \qquad r_1 = 3, \qquad r_2 = 1:$$

Ici, les relations (39, 40), où ψ est remplacé par χ, sont équivalentes (n° **25**) puisque, dans $R(\varphi, \chi)$ (64),

$$x^3 = x^{p_1 r_1} = x^{p_1 + r_1 + 1 - 1}, \qquad 2x - 1 = (2x-1)^{p_2 r_2} = (2x-1)^{p_2 + r_2 - 1}$$

$$\left(x - \frac{\sqrt{5}}{5}\right) = (x - \gamma_1)^{p_1'' r_1''} = (x - \gamma_1)^{p_1'' + r_1'' - 1},$$

$$\left(x + \frac{\sqrt{5}}{5}\right) = (x - \gamma_2)^{p_2'' r_2''} = (x - \gamma_2)^{p_2'' + r_2'' - 1}.$$

Nous n'avons donc qu'à nous en tenir à la relation (70) que nous écrirons

$$(71) \quad x^3(2x-1)(5x^2-1) = [3x^3 - 2x^2 - 2x + 1 + y(x^2 + 2x - 1)]\chi \qquad (\varphi = 0).$$

42. *Formation des polynomes* ψ_1, χ_1. — Les quantités $p_i - 1$, $p_i' - 1$ sont nulles (n° **41**). Nous pouvons donc, d'après le Tableau (T), prendre une constante pour Q_1 et (51) prendre pour χ_1 :

$$\chi_1 = (x - \gamma_1)(x - \gamma_2)(x - \varepsilon_1)^2 C' \qquad (\varphi = 0),$$

ou bien

$$\chi_1 = \left(x - \frac{\sqrt{5}}{5}\right)\left(x + \frac{\sqrt{5}}{5}\right) x^2 C',$$

$$(72) \qquad \chi_1 = x^2(5x^2 - 1)C$$

et nous devons arriver à cette forme de χ_1 *en partant de* (71) *dont on aura multiplié les deux membres par* ψC (n° **32**).

On peut simplifier les calculs en supposant, *non seulement à la fin, mais dès le début*, que

$$\varphi(x, y) = 0.$$

On aura

$$x^3(2x-1)(5x^2-1)\psi C = [3x^3 - 2x^2 - 2x + 1 + y(x^2 + 2x - 1)]\psi C\chi$$
$$(\varphi = 0).$$

Remplaçons, dans le second membre,

$$\psi(x, y) \qquad (\varphi = 0)$$

par sa valeur, *déjà calculée,* (61),

$$\psi = y(2x^3 - 3x^2 + 4x + 1) + 2x^4 - x^3 - x^2 + 2x \qquad (\varphi = 0)$$

et y^2, *autant qu'il se pourra* par (59)

$$y^2 = y - x^2 \qquad (\varphi = 0);$$

on aura successivement

$$\begin{aligned}
&x^3(2x-1)(5x^2-1)\psi C \\
&\quad = [3x^3 - 2x^2 - 2x + 1 + y(x^2 + 2x - 1)] \\
&\qquad \times [2x^4 - x^3 - x^2 + 2x + y(2x^3 - 3x^2 - 4x + 1)] C\chi \qquad (\varphi = 0),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&x^3(2x-1)(5x^2-1)\frac{\psi}{\chi}\frac{C}{C} \\
&\quad = (3x^3 - 2x^2 - 2x + 1)(2x^4 - x^3 - x^2 + 2x) \\
&\qquad + [(2x^4 - x^3 - x^2 + 2x)(x^2 + 2x - 1) \\
&\qquad\quad + (3x^3 - 2x^2 - 2x + 1)(2x^3 - 3x^2 - 4x + 1)]y \\
&\qquad + (2x^3 - 3x^2 - 4x + 1)(x^2 + 2x - 1)y^2 \qquad (\varphi = 0), \\
&\quad = (3x^3 - \ldots)(2x^4 - \ldots) + [(2x^4 - \ldots)(x^2 + \ldots) + \ldots]y \\
&\qquad + (2x^3 - 3x^2 - 4x + 1)(x^2 + 2x - 1)(y - x^2) \qquad (\varphi = 0),
\end{aligned}$$

et l'on obtient, après réductions,

$$\begin{aligned}
&x^3(2x-1)(5x^2-1)\frac{\psi}{\chi}\frac{C}{C} \\
&\quad = (3x^3 - 2x^2 - 2x + 1)(2x^4 - x^3 - x^2 + 2x) \\
&\qquad - x^2(2x^3 - 3x^2 - 4x + 1)(x^2 + 2x - 1) \\
&\qquad + [(2x^4 - x^3 - x^2 + 2x)(x^2 + 2x - 1) \\
&\qquad\quad + (3x^3 - 2x^2 - 2x + 1)(2x^3 - 3x^2 - 4x + 1) \\
&\qquad\quad + (2x^3 - 3x^2 - 4x + 1)(x^2 + 2x - 1)]y \qquad (\varphi = 0).
\end{aligned}$$

Le second membre est *rationnellement* irréductible; le terme indépendant de y et le coefficient de y doivent donc admettre *chacun* le facteur

$$x(2x - 1)$$

qui doit s'éliminer de lui-même (72); et en effet, toutes réductions faites, on arrive à

$$x^3(2x-1)(5x^2-1)\frac{\psi}{\chi}\frac{C}{C}$$
$$= x(x+1)(2x-1)[2x^4-5x^3+7x^2+2x-2+(4x^3-6x^2-2x+2)y]$$
$$(\varphi=0),$$

d'où l'on conclut, *comme on le prévoyait*,

$$(73)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\psi(x,y)}{\chi(x,y)} = \dfrac{(x+1)[2x^4-5x^3+7x^2+2x-2+(4x^3-6x^2-2x+2)y]C}{x^2(5x^2-1)C} \\ \qquad\qquad (\varphi=0), \end{array}\right.$$

$$\psi_1(x,y) = (x+1)[2x^4-5x^3+7x^2+2x-2+(4x^3-6x^2-2x+2)y]C$$
$$(\varphi=0),$$
$$\chi_1(x,y) = x^2(5x^2-1)C \qquad (\varphi=0).$$

43. *On peut ici*, grâce à ce que la courbe φ est unicursale, *vérifier directement la relation* (73). On a en effet

$$x = \frac{t}{t^2+1}, \qquad y = \frac{t^2}{t^2+1} \qquad (\varphi=0),$$

d'où

1° $$x^2(5x^2-1) = -\frac{t^2(t^2-t-1)(t^2+t-1)}{(t^2+1)^4} \qquad (\varphi=0),$$

2° $$\psi(x,y) = \frac{t(t-1)(t+1)(t^3-3t^2+2t-2)(t^2+t+1)}{(t^2+1)^4} \qquad (\varphi=0),$$

3° $$\chi(x,y) = \frac{t^3(t-1)(t^2-t-1)}{(t^2+1)^3} \qquad (\varphi=0),$$

4° $$x+1 = \frac{t^2+t+1}{t^2+1} \qquad (\varphi=0),$$

5° $$2x^4-5x^3+7x^2+2x-2+(4x^3-6x^2-2x+2)y$$
$$= -\frac{(t^3-3t^2+2t-2)(t^2+t-1)(t+1)}{(t^2+1)^4} \qquad (\varphi=0);$$

si l'on porte ces valeurs dans (73), on obtient, sans qu'il soit nécessaire d'entreprendre de nouveaux calculs, une identité.

44. Nous pouvons constater aisément que Γ est une courbe gauche du sixième ordre, complétée par deux droites parallèles à Oz, parti-

eularité fréquente dans les courbes représentées par un système de deux équations de la forme

$$\varphi(x, y) = 0, \qquad z\chi(x, y) - \psi(x, y) = 0.$$

En effet,

$$z = \frac{\psi(x, y)}{\chi(x, y)} = \frac{t(t-1)(t+1)(t^3-3t^2+2t-2)(t^2+t+2)}{(t^2+1)^4} \times \frac{(t^2+1)^3}{t^3(t-1)(t^2-t-1)};$$

z est indéterminé pour

$$t = 0, \qquad (x = y = 0),$$
$$t = 1, \qquad \left(x = y = \frac{1}{2}\right),$$
$$t = \pm 1, \quad (x = y = \pm\infty;$$

les deux droites, parallèles à Oz,

$$x = y = x, \qquad x = y = \frac{1}{2},$$

font partie de Γ. Ce sont les seules, car si les courbes (φ, χ) ont des points communs à l'infini, (φ, ψ) n'en ont pas.

Supprimons les facteurs t, $t-1$, t^2+1 :

$$z = \frac{(t+1)(t^3-3t^2+2t-2)(t^2+t+1)}{t^2(t^2+1)(t^2-t-1)}.$$

Un plan quelconque

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

sera donc percé par la courbe gauche

$$x = \frac{t}{t^2+1}, \qquad y = \frac{t^2}{t^2+1},$$
$$z = \frac{(t+1)(t^3-3t^2+2t-2)(t^2+t+1)}{t^2(t^2+1)(t^2-t-1)},$$

aux six points (x, y, z) définis par le système qu'on vient d'écrire et par les six racines de l'équation

$$t^2[At + Bt^2 + D(t^2+1)](t^2-t-1)$$
$$+ C(t+1)(t^3-3t^2+2t-2)(t^2+t+1) = 0.$$

Sur les groupes linéaires (mod p) *à invariant quadratique;*

PAR CAMILLE JORDAN.

M. Dickson a consacré plusieurs Chapitres de son bel Ouvrage (*Linear Groups*, Teubner, Leipzig, 1901) à l'étude approfondie des groupes de substitutions linéaires mod p (p étant premier) qui laissent invariante une forme quadratique $F(x_1, \ldots, x_n)$ mod p. Il en a déterminé l'ordre et la structure.

Il restait toutefois une lacune à combler dans le cas où p est impair. L'auteur avait montré que le groupe dérivé des carrés des substitutions du groupe en question contenait au moins la moitié des substitutions de celui-ci; mais il aurait pu les contenir toutes.

En s'appuyant sur des relations d'isomorphisme avec d'autres groupes connus, relations très remarquables dont l'établissement constitue une des parties les plus intéressantes de son Livre, M. Dickson avait établi la négative lorsque le nombre n des variables ne surpasse pas *six*. Mais lorsque $n > 6$, il en était réduit à des présomptions.

C'était une lacune importante. Elle a été heureusement comblée par un travail récent du R. P. de Séguier (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 1er septembre 1913). Cette théorie peut donc être considérée aujourd'hui comme achevée. Elle semble toutefois susceptible de quelques simplifications, qui font l'objet des pages suivantes.

Analyse.

I.

1. Soit p un nombre premier impair.

Deux formes quadratiques à n variables, F_n et F'_n (mod p) de

déterminants Δ, Δ' seront dites *équivalentes* s'il existe une substitution linéaire S (mod p) qui transforme F_n en F'_n.

Les congruences

$$F_n \equiv a, \qquad F'_n \equiv a \qquad (\text{mod } p)$$

auront évidemment le même nombre de racines.

D'autre part, si T est une substitution linéaire qui transforme F_n en elle-même, la substitution semblable $S^{-1}TS$ transformera F'_n en elle-même. Les groupes G_n, G'_n respectivement formés par les substitutions qui laissent invariantes F_n, F'_n seront donc semblables. Pour étudier l'ordre et la structure des groupes G_n, on pourra donc considérer au lieu de la forme F_n une autre forme quelconque, choisie arbitrairement parmi celles qui lui sont équivalentes.

2. Le déterminant δ de la substitution S qui transforme F_n en F'_n est lié à Δ, Δ' par la relation connue

$$\Delta' \equiv \Delta\delta^2 \qquad (\text{mod } p).$$

Si $\delta \equiv 1$, on aura donc $\Delta \equiv \Delta'$. On dira dans ce cas que l'équivalence est *absolue*.

On aura d'ailleurs dans tous les cas

$$(1) \qquad \left(\frac{\Delta'}{p}\right) = \left(\frac{\Delta}{p}\right),$$

$\left(\frac{\Delta}{p}\right)$ désignant le symbole de Legendre.

Réciproquement, l'existence de cette égalité suffit pour assurer l'équivalence de F_n avec F'_n.

On peut en effet, par des substitutions linéaires de déterminant 1 opérées sur F_n : 1° y faire apparaître un terme en x_1^2 s'il n'y existait pas déjà ; 2° faire disparaître ceux des rectangles où figure x_1. On obtient ainsi une transformée

$$a_1 x_1^2 + F(x_2, \ldots, x_n),$$

puis par des opérations analogues, celle-ci

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \ldots + a_n x_n^2.$$

Soient d'ailleurs α, β deux entiers liés par la relation

$$a_1\alpha^2 + a_2\beta^2 \equiv 1 \qquad (\text{mod } p).$$

La substitution de déterminant 1

$$\begin{vmatrix} x_1 & \alpha x_1 - a_2\beta x_2 \\ x_2 & \beta x_1 + a_1\alpha x_2 \end{vmatrix}$$

transformera

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 \quad \text{en} \quad x_1^2 + a_1 a_2 x_2^2.$$

Par une suite d'opérations analogues, on arrivera finalement à la transformée

$$(2) \qquad \sum_1^{n-1} x_k^2 + \Delta x_n^2$$

absolument équivalente à F_n.

On pourra transformer de même F'_n en

$$(2)' \qquad \sum_1^{n-1} x_k^2 + \Delta' x_n^2.$$

Mais de l'égalité (1) supposée satisfaite on déduit l'existence d'un entier δ tel que l'on ait

$$\Delta' \equiv \Delta\delta^2 \qquad (\text{mod } p),$$

de sorte que la substitution

$$| \; x_n \quad \delta x_n \; |$$

transformera (2) en (2)'.

La réduite (2) à laquelle nous avons ramené la forme F_n pourrait être remplacée dans l'étude suivante par une autre forme équivalente quelconque. Nous trouverons même parfois avantage à changer de réduite dans le cours du calcul.

3. Soit, par exemple, à déterminer le nombre des solutions de la congruence

$$F_n \equiv a \qquad (\text{mod } p).$$

nombre que nous désignerons par $\mathfrak{N}(n, \Delta, a)$.

La relation évidente

$$\sum_{a=0}^{a=p-1} \mathfrak{N}(n, \Delta, a) = p^n$$

déterminera $\mathfrak{N}(n, \Delta, 0)$ lorsqu'on connaîtra les valeurs de ces expressions lorsque $a \gtrless 0 \pmod{p}$.

Pour obtenir ces dernières, le plus commode est d'adopter pour forme réduite la suivante :

$$F_m = x_1 y_1 + \ldots + x_m y_m + \varphi,$$

φ étant égal à $(-1)^m \Delta u^2$ si $n = 2m + 1$ et à $z^2 + (-1)^m \Delta u^2$ si $n = 2m + 2$.

Les solutions de la congruence $F_m \equiv a$ seront de deux sortes :

1° Celles où $x_1, \ldots, x_m$ ne sont pas nuls à la fois; ils pourront être choisis de $p^m - 1$ manières différentes. Pour chacune d'elles on aura une relation linéaire déterminant une des variables y en fonction des $n - m - 1$ variables restantes qui resteront arbitraires. On obtient ainsi $(p^m - 1) p^{n-m-1}$ solutions.

2° Si les x sont tous nuls, les m variables y resteront arbitraires, mais on devra avoir

$$\varphi \equiv a.$$

Si donc ω est le nombre des solutions de cette congruence, on aura $p^m \omega$ solutions de deuxième espèce qui, ajoutées aux précédentes, donneront le nombre total

$$(p^m - 1) p^{n-m-1} + p^m \omega.$$

Reste à déterminer ω.

1° Si $n = 2m + 1$, la congruence

$$(-1)^m \Delta u^2 = a$$

aura deux solutions si $\left(\frac{(-1)^m \Delta a}{p}\right) = +1$. Elle n'en a aucune dans le cas contraire. Cela revient à dire qu'elle en a toujours

$$1 + \left[\frac{(-1)^m \Delta a}{p}\right].$$

2° Si $n = 2m + 2$, on aura

$$\varphi = z^2 + (-1)^m \Delta u^2.$$

Soit j une racine de la congruence

$$j^2 \equiv (-1)^{m+1}\Delta$$

et posons

$$X = z + ju, \qquad Y = z - ju,$$

d'où $\varphi = XY$.

La congruence $\varphi = a$ deviendra donc

$$XY = a.$$

Si $(-1)^{m+1}\Delta$ est résidu quadratique de p, j, X, Y seront réels et l'on aura évidemment $p-1$ solutions.

Dans le cas contraire, j sera imaginaire, X un entier complexe ayant pour conjugué $Y \equiv X^p$. La congruence deviendra

$$X^{p+1} \equiv a.$$

Or $X^{p+1} - a$ est un diviseur de

$$X^{p^2-1} - a^{p-1} \equiv X^{p^2-1} - 1.$$

Mais on sait que la congruence

$$X^{p^2-1} \equiv 1$$

a $p^2 - 1$ racines. La congruence

$$X^{p+1} \equiv a$$

en aura donc $p+1$.

On aura ainsi dans tous les cas

$$\omega = p - \left(\frac{(-1)^{m+1}\Delta}{p}\right).$$

Substituant pour n et ω leurs valeurs dans l'expression trouvée pour $\mathfrak{N}(n, \Delta, a)$, il viendra après réduction

$$(3) \qquad \begin{cases} \mathfrak{N}(2m+1, \Delta, a) = \left[p^m + \left(\dfrac{(-1)^m \Delta a}{p}\right)\right] p^m, \\ \mathfrak{N}(2m+2, \Delta, a) = \left[p^{m+1} - \left(\dfrac{(-1)^{m+1}\Delta}{p}\right)\right] p^m. \end{cases}$$

4. Cherchons l'ordre $O(n, \Delta)$ du groupe G_n dont les substitutions laissent F_n invariante.

Donnons à F_n son expression réduite

$$\Delta x_1^2 + \Sigma_2^n x_k^2.$$

Soit

$$S = | \; x_k a_k x_1 + b_k x_2 + \ldots \; | \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

une substitution de G_n. Ses coefficients devront satisfaire entre autres conditions à celle-ci :

$$\Delta a_1^2 + \Sigma_2^n a_k^2 = \Delta,$$

laquelle admet, comme on vient de le voir, $\mathfrak{N}(n, \Delta, \Delta)$ solutions. A chacune d'elles correspondent des substitutions de G_n dont nous déterminerons le nombre.

Nous pouvons déterminer une substitution T de déterminant 1 où les coefficients de la première colonne soient $a_1, \ldots, a_n$. Elle transformera F_n en une forme équivalente F'_n où le coefficient de x_1^2 soit Δ. Une autre substitution de déterminant 1 fera disparaître les rectangles en x_1 et donnera une nouvelle transformée

$$F''_n = \Delta x_1^2 + P(x_2, \ldots, x_n),$$

P ayant le déterminant 1 et pouvant être transformée en $\Sigma_2^n x_k^2$ par une nouvelle substitution V. La substitution $TUV = S$ transformera donc F_n en elle-même.

Ayant ainsi obtenu pour chacun des $\mathfrak{N}(n, \Delta, \Delta)$ systèmes de valeurs admissibles pour les coefficients a une première substitution de G_n, cherchons s'il en existe d'autres. Soit S′ une autre substitution quelconque où les coefficients a soient les mêmes que dans S. Elle appartiendra à G_n en même temps que $S'S^{-1}$. Or cette dernière substitution est évidemment de la forme

$$\left| \begin{array}{ll} x_1 & x_1 + b_1 x_2 + \ldots \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_k & b_k x_2 + \ldots \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots \end{array} \right|,$$

et pour qu'elle n'altère pas F_n, il faut et il suffit : 1° que les coefficients $b_1, \ldots$ de la première ligne soient nuls; 2° que la substitution qui n'est plus opérée que sur les variables $x_2, \ldots, x_n$ n'altère pas la

forme à $n-1$ variables

$$F_{n-1} = x_2^2 + \ldots + x_n^2.$$

Nous obtenons ainsi la formule de récurrence

$$O(n, \Delta) = \mathfrak{N}(n, \Delta, \Delta)\, O(n-1, 1),$$

d'où l'on déduit

$$O(n, \Delta) = \mathfrak{N}(n, \Delta, \Delta)\, \mathfrak{N}(n-1, 1, 1)\, \mathfrak{N}(n-2, 1, 1) \ldots \mathfrak{N}(1, 1, 1).$$

Substituons dans cette expression les valeurs précédemment trouvées pour les $\mathfrak{N}$.

Si $n = 2m+1$, nous aurons

$$\mathfrak{N}(2m+1, \Delta, \Delta) = \left[p^m + \left(\frac{-1}{p}\right)^m\right] p^m,$$

$$\mathfrak{N}(2m, 1, 1) = \left[p^m - \left(\frac{-1}{p}\right)^m\right] p^{m-1}.$$

Le produit de ces deux facteurs sera

$$(p^{2m}-1)\, p^{2m-1}.$$

Celui des deux suivants s'obtiendra en changeant m en $m-1$, et ainsi de suite. Enfin le dernier facteur $\mathfrak{N}(1, 1, 1)$ est égal à 2.

Faisant le produit et remarquant que

$$(2m-1) + (2m-3) + \ldots = m^2,$$

il viendra

$$O(2m+1, \Delta) = 2\, p^{m^2}\, \Pi_1^m (p^{2k}-1). \tag{4}$$

Si $n = 2m+2$, on aura

$$\mathfrak{N}(n, \Delta, \Delta) = \left[p^{m+1} - \frac{(-1)^{m+1}\Delta}{p}\right] p^m$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} O(2m+2, \Delta) &= \mathfrak{N}(n, \Delta, \Delta)\, O(2m+1, 1) \\ &= 2\, p^{m^2+m} \left[p^{m+1} - \left(\frac{(-1)^{m+1}\Delta}{p}\right)\right] \Pi_1^m (p^{2k}-1) \end{aligned} \tag{5}$$

5. Pour déterminer la structure de G_n et les substitutions fondamentales dont il est dérivé, la forme réduite qu'il paraît le plus avan-

tageux d'adopter est la suivante :

$$xy + \Sigma_3^n A_k z_k^2,$$

où les A_k peuvent être choisis arbitrairement sous réserve de satisfaire à la condition

$$\left(\frac{-\Pi_3^n A_k}{p}\right) = \left(\frac{\Delta}{p}\right).$$

G_n sera dérivé des substitutions fondamentales suivantes :

$$\begin{aligned}
M_k &= |\ x, y, z_k \quad x, y - A_k x - 2A_k z_k,\ z_k + x\ |,\\
N_k &= |\ x, y, z_k \quad x - A_k y - 2A_k z_k,\ y,\ z_k + y\ |,\\
P &= |\ x, y \quad gx,\ g^{-1}y\ | \qquad (g \text{ racine primitive de } p),\\
Q &= |\ x, y \quad y, x\ |.
\end{aligned}$$

Soit en effet

$$S = \left|\begin{array}{ll} .. & \ldots\ldots\ldots \\ z_k & a_k z_1 + \ldots \\ .. & \ldots\ldots\ldots \\ x & b z_1 + \ldots. \\ y & c z_1 + \ldots. \end{array}\right|$$

une quelconque des substitutions de G_n. Ses coefficients devront satisfaire entre autres conditions à la suivante :

$$bc + \Sigma A_k a_k^2 = A_k.$$

Multiplions-la à gauche par la substitution

$$M_k^\lambda = |\ x, y, z_k \quad x, y - \lambda A_k x - \lambda^2 A_k z_k,\ z_k + \lambda x\ |.$$

Nous obtiendrons une nouvelle substitution $M_k^\lambda S$ où les coefficients de la première colonne sont les mêmes que dans S, sauf a_k et c qui seront remplacés par

$$a'_k = a_k + \lambda b, \qquad c' = c - \lambda A_k b - \lambda^2 A_k a_k.$$

De même la multiplication à gauche par N_k^λ changerait a_k, b en

$$a_k + \lambda c, \qquad b - \lambda A_k c - \lambda^2 A_k a_k.$$

Par des opérations de ce genre et détermination convenable des

constantes λ, on pourra, si b et c ne sont pas nuls à la fois, rendre a_3 égal à 1, annuler les autres coefficients a et enfin b et c.

Si b et c étaient nuls, l'un au moins des coefficients a_k étant différent de zéro, une multiplication préalable par M_k changerait c en $-A_k a_k$ qui n'est plus nul.

On aura donc en appelant Π le produit des facteurs M_k, N_k qui ont été employés

$$\Pi S = S' \qquad \text{d'où} \qquad S = \Pi^{-1} S',$$

S' étant une nouvelle substitution où $a_3 = 1$, les autres coefficients de la première colonne étant nuls.

D'ailleurs S appartenant par hypothèse à G_n, il en est de même de S', qui sera dès lors opérée entre les seules variables $z_4, \ldots, x, y$.

Opérant sur S' comme sur S et ainsi de suite, on finira par mettre S sous la forme $\mathfrak{P} S_1$ où $\mathfrak{P}$ est un produit de substitutions M_k, N_k et S_1 une substitution opérée entre les seules variables x, y, laquelle résultera évidemment de la combinaison des substitutions P et Q.

6. La substitution Q étant d'ordre 2 et de déterminant -1, les substitutions M_k, N_k, P de déterminant 1, considérées seules, donneront naissance à un groupe G'_n d'ordre $\frac{1}{2} O(n, \Delta)$ qui sera un sous-groupe invariant dans G_n.

Le R. P. de Séguier a montré comme il suit l'existence d'un autre sous-groupe invariant G''_n d'indice 2.

Appelons pour abréger *points* de la courbe F_n les systèmes de valeurs entières (mod p) des variables qui satisfont à la relation $F_n \equiv 1$. Chaque substitution S de G_n fait éprouver à ces points une certaine permutation. Suivant que celle-ci appartient ou non au groupe alterné nous dirons que S est *paire* ou *impaire* et nous lui assignerons en conséquence un caractère $+1$ ou -1.

Il est clair que le caractère du produit de deux substitutions S, S' sera le produit de leurs caractères et que si G_n contient des substitutions impaires, celles qui sont paires formeront un sous-groupe invariant d'indice 2.

Or la substitution P est impaire, car elle laisse invariables les points pour lesquels $x = y = 0$ et permute les autres suivant des cycles d'ordre $p - 1$ (nombre pair).

Or à chaque cycle formé des points

$$(x, y, z_3, \ldots)(gx, g^{-1}y, z_3, \ldots)\ldots(g^{p-2}x, g^{-p+2}y, z_3, \ldots),$$

on peut associer, si les z ne sont pas tous nuls, un autre cycle qui s'en déduit en changeant leur signe. Ces cycles sont donc en nombre pair. Reste celui où tous les z sont nuls. Donc le nombre des cycles est impair et la permutation n'appartient pas au groupe alterné.

7. Cherchons de la même manière le caractère de quelques autres substitutions.

Considérons d'abord la substitution

$$|x, y \quad -x, \quad -y|.$$

Elle permute les points de F_n, sauf ceux où $x \equiv y \equiv 0$, suivant des cycles binaires. Ceux formés par les points où les z ne sont pas tous nuls, associés deux à deux, sont en nombre pair. Ceux qui restent se partagent les $p-1$ points définis par la condition $x_1 y_1 \equiv 1$. Leur nombre sera donc $\frac{p-1}{2}$ et le caractère de la substitution sera

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}} = \left(\frac{-1}{p}\right).$$

Passons à la substitution

$$s_k = |z_k \quad -z_k|.$$

Elle permute les points de F_n, sauf ceux où $z_k \equiv 0$, suivant des cycles binaires. Négligeant les couples de cycles associés, il reste à considérer ceux formés par les points définis par $A_k z_k^2 \equiv 1$. Il existe deux semblables points formant un cycle si $\left(\frac{A_k}{p}\right) = 1$; il n'en existe point dans le cas contraire. Le caractère cherché sera donc $-\left(\frac{A_k}{p}\right)$.

Considérons encore la substitution σ_n qui change le signe de toutes les variables. Son caractère sera

$$\left(\frac{-1}{p}\right) \prod \left[-\left(\frac{A_k}{p}\right)\right] = (-1)^{n-2}\left(-\frac{A_3 \ldots A_n}{p}\right) = (-1)^n \left(\frac{\Delta}{p}\right).$$

Enfin les substitutions M_k, N_k d'ordre p permuteront les points

qu'elles déplacent suivant des cycles d'ordre impair p. Elles auront donc pour caractère $+1$.

Nous verrons tout à l'heure que la substitution P^2 dérive de la combinaison des substitutions M_k, N_k. Le groupe Γ_n dérivé des substitutions M_k, N_k aura donc pour ordre $\frac{1}{4}O(n, \Delta)$ et contiendra toutes les substitutions de G_n dont le déterminant et le caractère sont tous deux égaux à $+1$. Ce sera un sous-groupe invariant dans G_n.

On obtiendra le groupe G'_n par l'adjonction à Γ_n de la substitution P; le groupe G''_n par l'adjonction de celle des deux substitutions s_3, Ps_3 dont le caractère est $+1$.

Un troisième groupe invariant G'''_n d'indice 2 sera formé des substitutions de G_n dont le caractère est égal au déterminant.

Enfin le groupe H_n d'ordre 2 formé par les puissances de σ_n sera encore un sous-groupe invariant. Il sera contenu dans Γ_n si l'on a à la fois n pair et $\left(\frac{\Delta}{p}\right) = +1$.

Nous allons montrer que ce sont là en général les seuls sous-groupes invariants de G_n. Il n'y a d'exception que si $p = 3$ et $n = 3$, ou $p = 3$, $n = 4$, $\left(\frac{\Delta}{p}\right) = +1$.

Pour établir cette proposition il nous faut recourir aux expressions remarquables que M. Dickson a données aux substitutions de G_n lorsque $n = 3$ ou 4.

8. Soit d'abord $n = 3$, d'où

$$F_3 = xy + \Delta z^2.$$

Soient α, β, γ, δ quatre entiers liés par la seule relation

$$\alpha\delta - \beta\gamma \equiv 1 \qquad (\text{mod } p)$$

et considérons les substitutions

	z_3	x	y
z_3	$\alpha\delta + \beta\gamma$	$\alpha\gamma$	$-\Delta^{-1}\beta\delta$
x	$2\alpha\beta$	α^2	$-\Delta^{-1}\beta^2$
y	$-2\Delta\gamma\delta$	$-\Delta\gamma^2$	δ^2

que nous représenterons par le symbole abrégé

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}.$$

On vérifie aisément :

1° Qu'elles n'altèrent pas F_3 ;

2° Qu'elles donnent lieu à la formule de composition

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha\alpha' + \beta\gamma' & \alpha\beta' + \beta\delta' \\ \gamma\alpha' + \delta\gamma' & \gamma\beta' + \delta\delta' \end{vmatrix}.$$

Il en résulte qu'elles forment un groupe K isomorphe au groupe linéaire

$$| X, Y \quad \alpha X + \beta Y, \gamma X + \delta Y |.$$

Ce dernier groupe K′ est, comme on sait, dérivé des substitutions fondamentales

$$| X, Y \quad X, Y + X |,$$
$$| X, Y \quad X + Y, Y |$$

auxquelles correspondent dans K les substitutions

$$M_3 = | z_3, x, y \quad z_3 + x, x, y - \Lambda x - 2\Lambda z_3 |,$$
$$N_3 = | z_3, x, y \quad z_3 + y, x - \Lambda y - 2\Lambda z_3, y |,$$

dont K sera dérivé.

D'ailleurs K′ contenant la substitution

$$| X, Y \quad gX, g^{-1}Y |,$$

K contiendra sa correspondante

$$| z_3, x, y \quad z_3, g^2 x, g^{-2} y | = P^2,$$

Celle-ci sera donc dérivée de M_3 et de N_3, ainsi que nous l'avions annoncé.

Le groupe K ne sera donc autre chose que Γ_3.

On sait enfin que le groupe K′ est d'ordre $(p^2 - 1)p$ et n'a en général d'autre sous-groupe invariant que celui formé des puissances de la substitution

$$\sigma = | X, Y \quad -X, -Y |.$$

Il y a exception si $p = 3$. Dans ce cas le groupe K′, d'ordre 24, con-

tiendra un sous-groupe invariant L′ d'ordre 8, dérivé des deux substitutions

$$|X, Y \quad Y, -X|,$$
$$|X, Y \quad X+Y, X-Y|$$

d'ordre 4 et ayant toutes deux pour carré la substitution σ.

D'ailleurs à la substitution 1 de Γ_3 correspondent dans K′ les deux substitutions

$$|X, Y \quad \varepsilon X, \varepsilon Y| \qquad (\varepsilon = \pm 1).$$

Donc l'ordre de Γ_3 sera $\frac{1}{2}(p^2-1)p$, et il sera simple, à moins qu'on n'ait $p=3$, auquel cas il aura les facteurs de composition 3, 2, 2.

9. Passons au cas où $n=4$. L'expression de F_1 sera

$$xy + z^2 - \Delta u^2.$$

Soit j une racine de la congruence

$$j^2 \equiv \Delta \qquad (\text{mod } p)$$

et prenons pour variables nouvelles

$$x_1 = z + ju, \qquad y_1 = z - ju,$$

F_1 prendra la forme

$$xy + x_1 y_1.$$

Supposons d'abord $\left(\frac{\Delta}{p}\right) = 1$; j, x_1, y_1 seront réels, et Γ_1 contiendra les deux substitutions d'ordre p

$$|x, y_1 \quad x + x_1, y_1 - y|,$$
$$|x_1, y \quad x_1 + x, y - y_1|,$$

dont la combinaison donnera les $(p^2-1)p$ substitutions de la forme

$$S = \begin{vmatrix} x, x_1 & ax + bx_1, cx + dx_1 \\ y, y_1 & dy - cy_1, -by + ay_1 \end{vmatrix}$$

où $ad - bc = 1$.

Elles forment un groupe K évidemment isomorphe au groupe linéaire

$$|x, x_1 \quad ax + bx_1, cx + dx_1|.$$

Son ordre sera donc $(p^2-1)p$, et il n'aura, si $p>3$, d'autre sous-groupe invariant que celui dérivé de la substitution σ_1 qui multiplie toutes les variables par -1.

Si $p=3$, d'où $(p^2-1)p=24$, il aura un autre sous-groupe invariant L d'ordre 8 et dérivé des substitutions

$$\begin{vmatrix} x, x_1 & x_1, -x \\ y, y_1 & y_1, -y \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x, x_1 & x+x_1, & x-x_1 \\ y, y_1 & -y-y_1, & -y+y_1 \end{vmatrix}$$

dont le carré est σ_1.

Γ_1 contiendra toutes les substitutions de K ainsi que celles du groupe K_1 transformé de K par la substitution

$$| x_1, y_1 \quad y_1, x_1 |.$$

Ces dernières ont pour expression générale

$$S_1 = \begin{vmatrix} x, x_1 & Ax+By_1 & -By+Ax_1 \\ y, y_1 & Dy-Cx_1 & Cx+Dy_1 \end{vmatrix} \qquad \text{où} \qquad AD-BC=1.$$

On vérifie sans peine :

1° Que les substitutions S_1 sont échangeables aux substitutions S ;

2° Que les seules substitutions qui soient à la fois de ces deux formes sont les puissances de σ_1.

Les produits SS_1 formeront donc un groupe d'ordre $\frac{1}{2}[(p^2-1)p]^2$. C'est précisément l'ordre de Γ_1, dont nous avons mis ainsi les substitutions sous forme explicite.

Les groupes K, K_1 sont invariants dans Γ_1, ainsi que le groupe des puissances de σ_1. En général il n'y en aura pas d'autre, et les facteurs de composition de Γ_1 seront

$$\frac{(p^2-1)p}{2}, \quad \frac{(p^2-1)p}{2}, \quad 2.$$

Pour $n=3$ les facteurs $\frac{(p^2-1)p}{2}=12$ devront être remplacés par leurs diviseurs premiers 3, 2, 2. Mais dans aucun cas Γ_1 n'aura de sous-groupe invariant qui ne contienne la substitution σ_4.

Soit en effet H un sous-groupe invariant qui contienne une substitution T autre que σ_4. Elle sera de la forme SS_1, l'un au moins des deux facteurs, S par exemple, différant de σ_4. Soit U une substitution de K non échangeable à S; H contiendra la substitution

$$U^{-1}T^{-1}UT = U^{-1}S^{-1}US$$

qui appartient à K sans se réduire à l'unité. Si elle diffère de σ_1, on la combinera avec ses transformées; ce qui reproduira en général le groupe K ou tout au moins (si $p = 3$) son sous-groupe invariant L. Mais celui-ci contient σ_4.

10. Supposons maintenant $\left(\frac{\Delta}{p}\right) = -1$. Les variables x_1, y_1 seront des imaginaires conjuguées. D'ailleurs les substitutions S, S_1 n'altèrent pas F_1 et sont échangeables entre elles, indépendamment de la signification des quantités a, b, c, d, A, B, C, D.

Considérons donc le produit SS_1 où nous prendrons pour a, b, c, d des entiers complexes $a' + a''j, \ldots$ liés par la seule relation $ad - bc = 1$ et pour A, B, C, D les expressions conjuguées. L'opération ainsi obtenue

$$SS_1 = \begin{vmatrix} x & Aax - Bby + Abx_1 + Bay_1 \\ y & -Ccx + Ddy - Cdx_1 - Dcy_1 \\ x_1 & Acx - Bdy + Adx_1 + Bcy_1 \\ y_1 & Cax - Dby + Cbx_1 + Day_1 \end{vmatrix}$$

représentera une substitution réelle, car les expressions qu'elle fait succéder à x et à y ne changent pas quand on change j en $-j$ et d'autre part celles qui succèdent aux variables conjuguées x_1, y_1 sont également conjuguées.

Ces substitutions SS_1 forment un groupe K évidemment isomorphe au groupe linéaire K′ formé des substitutions

$$\begin{vmatrix} X, X_1 & aX + bX_1, cX + dX_1 \\ Y, Y_1 & AY + BY_1, CY + DY_1 \end{vmatrix},$$

où X, X_1 sont des variables complexes et Y, Y_1 leurs conjuguées. Son ordre est $(p^4 - 1)p^2$. Il n'a d'autre sous-groupe invariant que celui formé par les substitutions où $b = B = c = C = 0$ et $a = A = d = D = \pm 1$.

Mais aux deux substitutions de ce sous-groupe correspond dans K la seule substitution 1. Donc K est simple et d'ordre $\frac{1}{2}(p^4-1)p^2$.

Il se confond avec Γ_4; car ces deux groupes ont le même ordre et d'autre part les substitutions de K appartiennent à Γ_4; car leur déterminant $(ad-bc)(AD-BC)$ est égal à $+1$. Il en est de même de leurs caractères; car K′ est dérivé de substitutions fondamentales

$$\begin{vmatrix} X, X_1 & X+lX_1, X_1 \\ Y, Y_1 & Y+LY_1, Y_1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} X, X_1 & X, X_1+mX \\ Y, Y_1 & Y, Y_1+MY \end{vmatrix},$$

où l, m sont des entiers complexes, L, M leurs conjugués. Ces substitutions étant d'ordre p impair, il en sera de même de leurs correspondantes génératrices de K. Elles auront donc le caractère $+1$.

11. Soit enfin $n>4$. Nous allons démontrer que tout sous-groupe K (autre que H_n), invariant dans G_n, contient Γ_n.

Soient en effet : S une substitution de K qui n'appartienne pas à H_n; T une substitution quelconque de G_n; les substitutions $T^{-1}ST$, $T^{-1}S^{-1}TS$ appartiendront à K et la seconde appartiendra aussi à Γ_n. Nous allons en conclure que si K contient une substitution S qui n'appartienne pas à H_n il contiendra Γ_n.

Supposons F_n mise sous la forme

$$\Sigma A_k x_k^2,$$

G_n contiendra la substitution T_k qui change le signe de la seule variable x_k, et deux cas seront à distinguer :

1° Si S est échangeable à toutes les substitutions T_k, elle sera nécessairement de la forme

$$| x_1, \ldots, x_n \quad a_1x_1, \ldots, a_nx_n |$$

et pour qu'elle n'altère pas F_n, il faut que chacun des a_n soit égal à ± 1. Mais si S n'appartient pas à H_n, ils ne seront pas tous du même signe. Supposons donc pour fixer les idées qu'on ait $a_1=a_2=-a_3$.

Celles des substitutions de G_n qui n'altèrent que les variables x_1, x_2, x_3 forment un groupe G_3 d'ordre $2(p^2-1)p$. Celles d'entre elles

qui sont échangeables à S, devant laisser invariantes séparément $A_3 x_3^2$ et $A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2$, seront au plus au nombre de $2.2(p \pm 1)$. Donc G_3 contient une substitution U non échangeable à S. Et K contiendra la substitution

$$S_1 = U^{-1} S^{-1} U S$$

qui diffère de l'unité, mais est restreinte aux variables x_1, x_2, x_3. Si donc on décompose F_n en une somme de deux formes partielles

$$F_4 = A_1 x_1^2 + \ldots + A_4 x_4^2, \qquad F_{n-4} = A_5 x_5^2 + \ldots,$$

K contiendra une substitution S_1 du groupe G_4 formé par les substitutions de G_n qui sont restreintes aux variables de F_4. Combinée à ses transformées elle reproduira, soit toutes les substitutions de G_4, soit la substitution

$$\sigma_4 = | \; x_1, \ldots, x_4 \quad -x_1, \ldots, -x_4 \; |.$$

12. 2° On arrivera à un résultat analogue si l'une des substitutions T_k, par exemple T_1, n'est pas échangeable à S.

Soit en effet

$$S = \begin{vmatrix} x_1 & \alpha\, x_1 + \beta\, x_2 + \ldots \\ x_2 & a_2 x_1 + b_2 x_2 + \ldots \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n & a_n x_1 + b_n x_2 + \ldots \end{vmatrix}.$$

Par un changement de variables exécuté sur $x_2, \ldots, x_n$ (il devra être opéré sur F_n en même temps que sur S) on pourra faire disparaître les coefficients $a_3, \ldots, a_n$. Cela fait, K contiendra la substitution

$$S_1 = T_1^{-1} S^{-1} T_1 S$$

qui diffère de l'unité, mais laisse évidemment invariables $x_3, \ldots, x_n$. En l'élevant, s'il est nécessaire, à une puissance convenable on obtiendra une nouvelle substitution S_2, d'ordre premier, commune à K et à Γ_n.

Par un nouveau changement de variables opéré sur x_1, x_2 on ramènera S_2 à sa forme canonique. Si son ordre n'est pas égal à p, cette forme canonique sera

$$| \; x_1, x_2 \quad r x_1, r^{-1} x_2 \; |,$$

r pouvant être réel ou complexe (dans ce dernier cas x_1, x_2 seraient des variables complexes et conjuguées). Les variables non écrites z_1, z_2, ... restant inaltérées.

La forme F_n, étant invariante par S_2, devra prendre après le changement de variables la forme

$$A x_1 x_2 + Q,$$

Q étant une fonction quadratique des seuls z.

En la mettant sous la forme

$$A_1 z_1^2 + A_2 z_2^2 + \ldots$$

et posant

$$A x_1 x_2 + A_1 z_1^2 + A_2 z_2^2 = F_4,$$

on aura comme dans le cas précédent

$$F_n = F_4 + F_{n-4}.$$

Si S_2 est d'ordre p, elle aura l'une des deux formes canoniques suivantes :

$$(6) \qquad | \, x_2, x_1, z_1 \quad x_2 + x_1, x_1 + z_1, z_1 \, |,$$

$$(7) \qquad | \, x_1, x_2, z_1, z_2 \quad x_1 + z_1, x_2 + z_2, z_1, z_2 \, |.$$

Dans le premier cas, la forme F_n, pour être invariante, devra avoir pour expression

$$A(x_2 z_1 - x_1^2) + L z_1 + Q,$$

L étant linéaire en z_1, z_2, ... et Q quadratique en z_2, ... On peut d'ailleurs faire disparaître le terme $L z_1$ par le changement de x_2 en $x_2 - L$, qui n'altère pas l'expression canonique (6) de S_2.

Mettant Q sous la forme $A_2 z_2^2 + \ldots$ et posant

$$A(x_2 z_1 - z_1^2) + A_2 z_2^2 = F_4,$$

on aura encore

$$F_n = F_4 + F_{n-4}.$$

Dans le second cas, F_n, pour être invariante par S_2, aura nécessairement pour expression

$$A(x_1 z_2 - x_2 z_1) + L_1 z_1 + L_2 z_2 + Q,$$

L_1, L_2 étant linéaires en z_1, z_2, z_3, ... et Q quadratique en z_3, ... D'ailleurs par le changement de x_1, x_2 en $x_1 - L_2$, $x_2 + L_1$ on pourra faire disparaître les termes $L_1 z_1$, $L_2 z_2$.

On pourra donc dans tous les cas mettre F_n sous la forme

$$F_4 + F_{n-4},$$

K contenant une substitution S du groupe Γ_4 formé par celles des substitutions de Γ_n qui sont opérées entre les seules variables de F_4. Il contiendra par suite les transformées de S par les substitutions de Γ_4. Or l'étude de ce groupe a montré que par la combinaison de ces transformées on peut obtenir, suivant le caractère quadratique du déterminant de F_4, soit toutes les substitutions de Γ_4, soit la substitution σ_4.

13. Mettons F_4 sous la forme

$$xy + A_3 z_3 + A_4 z_4$$

et F_{n-4} sous la forme

$$A_5 z_5^2 + \ldots.$$

Si S contient Γ_4 il contiendra sa substitution fondamentale M_3.

D'autre part, s'il contient σ_4, il contiendra la substitution

$$M_5^{-1} \sigma_4^{-1} M_5 \sigma_4 = M_5^{-2}$$

et par suite la substitution M_5 elle-même; or celle-ci, par un simple changement de notation, peut être remplacée par M_3.

Donc, F_n étant mise sous la forme

$$xy + \Sigma_3^n A_k z_k^2,$$

K contiendra la substitution M_3. Il contiendra aussi N_3 qui est sa transformée par la substitution

$$| x, y \quad y, x |.$$

Les coefficients $A_4, \ldots, A_n$ étant arbitraires sous la seule condition

$$\left(-\frac{A_3 \ldots A_n}{p}\right) = \left(\frac{\Delta}{p}\right),$$

on pourra supposer $A_4, \ldots, A_{n-1}$ choisis égaux à A_3 et si $k < n$,

K contiendra les substitutions M_k, N_k transformées de M_3, N_3 par la substitution

$$| x_3, y_3, x_k, y_k \quad x_k, y_k, x_3, y_3 |.$$

Si donc nous désignons par Γ_{n-1} le groupe formé par les substitutions de déterminant 1 et de caractère 1 qui laissent invariante la fonction

$$F_{n-1} = xy + \Sigma_3^{n-1} A_3 x_k^2,$$

K contiendra Γ_{n-1} puisqu'il contient toutes les substitutions fondamentales dont il est dérivé.

Soient d'ailleurs A'_3, A'_4 deux entiers quelconques assujettis à la seule condition

$$A'_3 A'_4 \equiv A_3^2$$

qui permet de choisir arbitrairement A'_3. On pourra déterminer deux fonctions z'_3, z'_4 linéaires en z_3, z_4 telles que l'on ait

$$A_3 z_3^2 + A_3 z_4^2 = A'_3 z_3'^2 + A'_4 z_4'^2,$$

Γ_{n-1} (et par suite K) contiendra la substitution

$$M'_3 = | z'_3, x, y \quad z'_3 + x, x, y - A'_3 x - 2 A'_3 z'_3 |.$$

Celle-ci appartient d'ailleurs, ainsi que M_n et N_n, au groupe Γ_4 formé par les substitutions de caractère et de déterminant 1 qui laissent invariante la fonction

$$F_4 = xy + A'_3 z_3^2 + A_n z_n^2$$

de déterminant $-A'_3 A_n$.

Si nous disposons de A'_3 de telle sorte que l'on ait

$$\left(-\frac{A'_3 A_n}{p}\right) = -1,$$

Γ_4 sera simple; donc K, contenant une de ses substitutions M'_3, les contiendra toutes. Il contiendra en particulier M_n et N_n. Il contiendra donc Γ_n, puisqu'il possède toutes ses substitutions fondamentales.

14. Pour déterminer les facteurs de composition de G_n il reste à reconnaître si les sous-groupes G'_n, G''_n, Γ_n auraient d'autres sous-

groupes invariants que ceux de G_n. Dans le cas de la négative, Γ_n ne contenant pas H_n lorsque $\left(\frac{\Delta}{p}\right) = -1$, serait simple. Il en est effectivement ainsi pour $n = 4$. Nous pourrons admettre que cela ait encore lieu pour toutes les valeurs de n inférieures à celle sur laquelle nous raisonnerons.

Dans ces conditions, nous établirons qu'il y a contradiction à admettre que G'_n admette un sous-groupe invariant qui ne soit pas invariant dans G_n.

Mettons en effet F_n sous la forme

$$F_n = A_1 x_1^2 + \ldots + A_n x_n^2 = A_1 x_n^2 + F_{n-1},$$

$A_2, \ldots, A_n$ pouvant être choisis arbitrairement, on peut admettre que $\left(\frac{A_2 \ldots, A_n}{p}\right)$ soit égal à -1. Le groupe Γ_{n-1} correspondant à F_{n-1} sera donc simple par hypothèse.

Cela posé, soient K le sous-groupe invariant dont nous supposons l'existence ; ω son ordre. La substitution Q permutable à G'_n le transformera en un autre groupe K′, également invariant dans G'_n. Réciproquement Q transformera K′ en K, puisque Q^2, appartenant à G'_n, transforme K en lui-même.

Les substitutions communes à K et à K′ forment un groupe L invariant dans G_n. Il sera donc égal à H_n, s'il contient quelque substitution autre que l'unité. Son ordre d sera donc 1 ou 2.

D'ailleurs, S, S′ étant deux substitutions prises respectivement dans K et dans K′, la substitution $S^{-1}S'^{-1}SS'$ appartiendra à L.

Les substitutions dérivées de la combinaison de K et de K′ seront donc de la forme SS′ et leur nombre sera $\frac{\omega^2}{d}$.

Elles forment un sous-groupe A invariant dans G_n et contenu dans G'_n. Il sera donc identique à Γ_n ou à G'_n, et son ordre sera

$$\frac{1}{1} O(n, \Delta) \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2} O(n, \Delta).$$

On aura donc l'égalité

$$\omega^2 = m O(n, \Delta), \tag{8}$$

m ayant l'une des trois valeurs

$$\frac{1}{4}, \quad \frac{1}{2}, \quad 1.$$

15. Or une semblable égalité est impossible. On a en effet

$$\omega = 2\omega' \qquad \text{ou} \qquad \omega = \omega',$$

ω' étant l'ordre du groupe K_1 formé par celles des substitutions de K qui appartiennent à Γ_n. Soit une de celles-ci

$$| \; x_k \quad a_k x_1 + b_k x_2 + \ldots \; | \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Les coefficients a_k satisferont à la relation

$$\Sigma A_k a_k^2 = A_1 \tag{9}$$

qui a $\mathfrak{N}(n, \Delta, A_1)$ solutions.

1° Supposons en premier lieu qu'à chacune d'elles corresponde tout au plus une seule substitution de K_1. On aura

$$\omega \leqq 2\,\mathfrak{N}(n, \Delta, A_1).$$

Mais, d'autre part, le déterminant Δ' de $F_n - A_1 x_1^2$ est $A_1^{-1}\Delta$, qui a le même caractère quadratique que $A_1\Delta$. On aura donc

$$O(n, \Delta) = \mathfrak{N}(n, \Delta, A_1)\, O(n-1, A_1\Delta).$$

On déduirait donc de la relation (8) l'inégalité

$$16\,\mathfrak{N}(n, \Delta, A_1) \leqq O(n-1, A_1\Delta). \tag{10}$$

En se reportant aux expressions (3), (4), (5) des quantités $\mathfrak{N}$ et O, on voit immédiatement que cette inégalité ne saurait avoir lieu, le second membre étant beaucoup plus grand que le premier.

2° Supposons au contraire qu'à une seule solution de la congruence (9) correspondent plusieurs substitutions S, S', ... de K_1. Il contiendra la substitution $S'S^{-1}$ qui appartient à Γ_{n-1}.

Mais Γ_{n-1} est simple et d'ordre

$$\frac{1}{4}\, O(n-1, A_1\Delta).$$

L'ordre ω de K sera donc au moins égal à ce nombre.

Substituant cette valeur minima et celle de $O(n, \Delta)$ dans l'égalité (8) on arrivera encore à l'inégalité (10) qui est impossible.

16. Raisonnant sur G'_n et Γ_n comme nous venons de le faire sur G_n et G'_n, on verra exactement de même que Γ_n ne peut admettre d'autre sous-groupe invariant que H_n. Il le contiendra effectivement si n est pair et Δ résidu de p, de sorte que G_n aura les sous-groupes invariants successifs

$$G_n, \quad G'_n, \quad \Gamma_n, \quad H_n, \quad 1.$$

Les facteurs de composition seront donc

$$2, \quad 2, \quad \frac{1}{8}O(n, \Delta), \quad 2.$$

Dans tout autre cas, H_n ne faisant plus partie de cette suite, les facteurs de composition seront

$$2, \quad 2, \quad \frac{1}{4}O(n, \Delta).$$

II.

17. Nous avons supposé, dans tout ce qui précède, que p était impair. S'il est égal à 2, le nombre des variables sera nécessairement un nombre pair $2n$.

Ce cas étant complètement discuté dans le Livre de M. Dickson, nous nous bornerons à quelques remarques relatives aux groupes résolubles contenus dans G_{2n}.

Nous avons démontré autrefois, par des considérations indirectes, que G_{2n} contient un sous-groupe invariant G'_{2n} d'indice 2. Mais c'est seulement dans un Mémoire postérieur (*Journal de Liouville*, 1905) que nous avons pu définir ses substitutions par un caractère indépendant du choix des variables indépendantes.

Une substitution S étant donnée, à chaque racine s de la congruence caractéristique correspond au moins une fonction et peut-être plusieurs fonctions distinctes des variables primitives que S multiplie par s. Soit $N(s)$ leur nombre. La somme $\Sigma N(s)$ étendue aux diverses racines

de la congruence caractéristique pourra être paire ou impaire. Nous dirons, suivant le cas, que la substitution S est elle-même paire ou impaire.

Cette définition posée, le résultat est le suivant :

Le groupe G'_{2n} est formé des substitutions paires contenues dans G_{2n}.

18. Une question essentielle dans l'étude des groupes résolubles Γ contenus dans G_{2n} construits par la méthode décrite dans notre *Traité des Substitutions* est de reconnaître pour chacun de ces groupes s'il contient ou non des substitutions qui ne figurent pas dans G'_n.

La solution de cette question, que nous avions obtenue dans cet Ouvrage (n°s 671 à 684) par des considérations très compliquées, devient tout à fait simple lorsqu'on s'appuie sur la proposition précédente.

Rappelons en effet quelques-uns des caractères principaux des groupes résolubles en question. Ils sont de plusieurs sortes :

19. 1° *Groupes décomposables.* — Ils correspondent aux diverses décompositions de n en deux facteurs l, m. Les variables s'y répartissent en l systèmes

$$(x_1, \ldots, x_{2m}), \quad (y_1, \ldots, y_{2m}), \quad \ldots.$$

La fonction quadratique invariante F_{2n} est une somme de l fonctions partielles pareilles

$$F(x_1, \ldots, x_{2m}) + F(y_1, \ldots, y_{2m}) + \ldots.$$

Le groupe Γ résulte de la combinaison de substitutions S permutant les systèmes d'un mouvement d'ensemble (de manière à remplacer chaque variable par une autre de même indice) avec des substitutions T opérées sur les seules variables $x_1, \ldots, x_{2m}$: celles-ci formant un groupe Γ_1 résoluble, indécomposable et n'altérant pas la fonction partielle $F(x_1, \ldots, x_{2m})$.

Il est clair que la substitution S est paire ; car s'il est une fonction f_1 des variables $x_1, y_1, \ldots$, qu'elle multiplie par un facteur s, elle reproduira, multipliées par le même facteur, les fonctions $f_2, \ldots, f_{2m}$ for-

mées respectivement avec les variables d'indice 2, ..., $2m$. Le nombre total des fonctions qu'elle multiplie par des facteurs constants sera donc un multiple de $2m$, nombre pair.

20. Reste à savoir si Γ_1 contient ou non des substitutions impaires. La question est ainsi ramenée au cas des groupes indécomposables. Ceux-ci se distinguent en deux catégories :

2° *Groupes indécomposables de première catégorie.* — Les variables s'y partagent en deux systèmes

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad (y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

La forme invariante F_{2n} a pour expression

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n.$$

Les substitutions de Γ seront de l'une des deux formes $\mathfrak{Q}$ ou $\mathfrak{R}\mathfrak{Q}$; $\mathfrak{R}$ désignant la substitution qui échange les x avec les y, et $\mathfrak{Q}$ le produit d'une substitution partielle

$$S = \left| x_k \quad \sum_i a_{ik} x_i \right|,$$

opérée sur les x, par la substitution *adjointe*

$$S' = \left| y_k \quad \sum_i b_{ik} y_i \right|$$

opérée sur les y. On sait que cette substitution adjointe est la réciproque de la *transposée*

$$| y_k \quad \Sigma a_{ki} y_i |.$$

1° Les substitutions $\mathfrak{Q}$ sont paires. Supposons en effet la substitution S mise sous forme canonique. Les variables s'y partageront en diverses suites ayant chacune une forme telle que la suivante

$$| x_\mu, x_{\mu-1}, \ldots, x_1 \quad s(x_\mu + x_{\mu-1}), s(x_{\mu-1} + x_{\mu-2}), \ldots, s x_1 |.$$

A cette suite répondra dans la transposée la suivante

$$| y_\mu, y_{\mu-1}, \ldots, y_1 \quad s y_\mu, s(y_\mu + y_{\mu-1}), \ldots, s(y_2 + y_1) |.$$

A la fonction x_ι, que S multiplie par s, correspondra ainsi une autre fonction y_μ multipliée par s dans la transposée et par s^{-1} dans l'adjointe. Les fonctions des variables x, y que $\mathfrak{Q}$ multiplie par des facteurs constants étant ainsi associées deux à deux seront en nombre pair.

2° Passons à la substitution $\mathfrak{R}$. Dans la substitution partielle

$$| \; x_k, y_k \quad y_k, x_k \; |$$

prenons pour variable indépendante $z_k = x_k + y_k$. La substitution considérée n'altère pas z_k et remplace x_k par $z_k - x_k \equiv x_k + z_k \pmod 2$; d'où la forme canonique

$$| \; x_k, z_k \quad x_k + z_k, z_k \; |.$$

Les seules fonctions que $\mathfrak{R}$ reproduise à des facteurs constants près sont donc les n fonctions z_k. Donc $\mathfrak{R}$ sera paire ou impaire en même temps que n.

Donc pour que Γ contienne une substitution impaire, il faut que n soit impair. Cette condition est suffisante, car Γ ne peut être indécomposable que s'il contient une substitution de l'espèce $\mathfrak{R}\mathfrak{Q}$.

21. 3° *Groupes indécomposables de deuxième catégorie.* — Ils correspondent aux décompositions de n en un produit de facteurs

$$n = \nu \pi^\sigma \pi'^{\sigma'} \ldots = \nu m,$$

$\pi, \pi', \ldots$ étant des nombres premiers qui divisent $2^\nu + 1$. Par l'introduction d'une racine j d'une congruence irréductible de degré 2ν, les variables indépendantes seront complexes et formeront 2ν séries conjuguées

$$(x_1, \ldots, x_m), (x'_1, \ldots, x'_m) \ldots (x_1^{(2\nu-1)}, \ldots, x_m^{(2\nu-1)})$$

et les substitutions de Γ seront de la forme $\mathfrak{P}^\rho \mathfrak{Q}$, $\mathfrak{P}$ désignant la substitution qui remplace chaque variable x_k^i par sa conjuguée suivante x_k^{i+1} et $\mathfrak{Q}$ un produit de substitutions conjuguées opérées respectivement sur les variables de chacune des séries conjuguées.

1° Les substitutions $\mathfrak{Q}$ sont paires. Car si elles multiplient par un facteur constant s une fonction f des variables de la première série,

elles multiplieront les 2ν fonctions conjuguées $f, f', \ldots, f^{2\nu-1}$ respectivement par les facteurs $s, s', \ldots, s^{2\nu-1}$ conjugués de s. Le nombre total des fonctions que $\mathfrak{Q}$ multiplie par des facteurs constants sera donc un multiple de 2ν, nombre pair.

2° Passons à la substitution $\mathfrak{P}$. Elle est le produit de m permutations circulaires

$$(x_1 x'_1 \ldots x_1^{(2\nu-1)}), \ldots, (x_k x'_k \ldots x_k^{(2\nu-1)}). \quad \ldots$$

Pour qu'une fonction linéaire

$$a x_k + a' x'_k + \ldots$$

des variables d'indice k se reproduise multipliée par s lorsqu'on effectue sur les variables la permutation circulaire indiquée, il faut qu'on ait

$$a \equiv a's, \quad a' \equiv a''s, \quad \ldots \quad (\text{mod } 2),$$

d'où

$$s^{2\nu} \equiv 1 \quad (\text{mod } 2).$$

A chaque racine de cette équation correspond ainsi une seule fonction (déterminée à un facteur constant près). Cherchons donc le nombre de ces racines.

Soit $2\nu = 2^\alpha q$, q étant impair. On a

$$s^{2^\alpha q} - 1 \equiv (s^{2^{\alpha-1}q} - 1)^2 \equiv \ldots \equiv (s^q - 1)^{2^\alpha} \quad (\text{mod } 2).$$

D'ailleurs $s^q - 1$ et sa dérivée qs^{q-1} n'ayant pas de racine commune, on aura q racines distinctes.

Le nombre total des fonctions que $\mathfrak{P}$ multiplie par des facteurs constants est donc mq. Or q est impair; m l'est également, étant un produit de facteurs qui divisent $2^\nu + 1$. Donc $\mathfrak{P}$ est impaire.

Donc Γ contiendra une substitution impaire si parmi ses substitutions, qui sont toutes de la forme $\mathfrak{P}^\rho \mathfrak{Q}$, il en est où ρ soit impair.

22. Or nous avons montré dans notre Traité, par une analyse qu'il est inutile de reproduire ici, que pour former le groupe Γ on est amené à construire :

1° Un groupe H résoluble et général contenu dans le groupe linéaire à 2σ variables (mod π) et dont les substitutions, opérées simultané-

ment sur deux séries de variables cogrédientes

$$(x_1, \ldots, x_{2\sigma}), \quad (X_1, \ldots, X_{2\sigma}),$$

reproduisent à un facteur constant près une forme bilinéaire gauche. Si g est une racine primitive de π, l'exposant de la moindre puissance de g à laquelle le multiplicateur puisse se réduire est 1 ou 2. Cet exposant d se nomme l'exposant du groupe H;

2° Un groupe analogue H′ à $2\sigma'$ variables (mod π') et d'exposant d'; g' désignant une racine primitive de π';

Etc.

Pour qu'il existe dans Γ une substitution $\mathfrak{P}^\rho \mathfrak{Q}'$ où ρ ait une valeur donnée, il faut et il suffit qu'on puisse déterminer des entiers e, e', ..., tels que l'on ait à la fois

$$2^\rho \left\{ \begin{array}{ll} \equiv g^{de} & (\bmod \pi), \\ \equiv g'^{d'e'} & (\bmod \pi'), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \end{array} \right.$$

La première congruence pourra toujours être satisfaite si $d = 1$; ou si d étant égal à 2, 2 est résidu quadratique de π. Mais elle sera impossible pour les valeurs impaires de ρ si $d = 2$ et $\left(\frac{2}{\pi}\right) = -1$.

De même pour les autres congruences.

Donc *la condition pour l'existence dans* Γ *d'une substitution impaire est que* 2 *soit résidu quadratique de tous ceux des entiers* π *pour lesquels l'exposant du groupe correspondant est* 2.

Sur les groupes à invariant bilinéaire ou quadratique dans un champ de Galois;

PAR J.-A. DE SÉGUIER.

La théorie des groupes linéaires à invariant quadratique dans un champ galoisien est notablement simplifiée quand on prend cet invariant sous la forme d'une somme de rectangles augmentée d'une forme quadratique à une ou deux variables. Il en est de même de la théorie du groupe linéaire à invariant hermitien quand on prend cet invariant sous une forme analytique qui sera précisée plus loin. De plus, les deux théories et celle du groupe linéaire à invariant bilinéaire gauche se présentent alors avec un parallélisme qui est un nouvel élément de simplification et qui facilite l'étude des relations entre les trois groupes.

C'est l'exposition de cette triple théorie ainsi simplifiée que je reprends ici, en y ajoutant des résultats nouveaux. Une partie de ces résultats a été indiquée dans trois Notes présentées à l'Académie des Sciences ([1]). Je me borne ici au développement de la première.

L'idée de prendre l'invariant quadratique sous la forme indiquée, quel que soit le module, appartient à M. Jordan, qui a déjà employé cette forme dans ses dernières recherches sur les groupes résolubles ([2]), en particulier pour déterminer l'ordre du groupe et ses générateurs dans le cas d'un champ d'ordre premier. Je n'aurai donc, sur ces deux

([1]) *Comptes rendus*, t. 157, 1er septembre 1913, p. 430; t. 161, 8 novembre 1915, p. 553; t. 161, 29 novembre 1915, p. 670.

([2]) *Memorie della Pontificia Accademia Romana dei Nuovi Lincei*, t. XXVI (1908) et Cours professé au Collège de France en 1903.

points, qu'à suivre son exposé. Je prendrai toutefois l'invariant sous une forme un peu plus générale, afin d'avoir toujours les mêmes générateurs quelle que soit la parité du module et du nombre des variables.

Il est à peine utile de rappeler que le sujet qui m'occupe a été étudié d'abord par M. Jordan, dans son *Traité des substitutions*, puis par M. Dickson, dans ses *Linear groups* (1901). Pour des renvois plus précis, je me suis borné à certains points particuliers que le lecteur aurait eu quelque peine à retrouver.

I. — Généralités.

1. Soient $\mathfrak{S}$ un champ fini d'ordre $\pi = p^k$ (p premier); $\mathfrak{S}' = \mathfrak{S}(\upsilon)$ le champ d'ordre π^2 défini par la racine υ d'une équation quadratique irréductible dans $\mathfrak{S}$ [1]; $a = (a_{ik})$ une matrice invertible d'ordre n de $\mathfrak{S}$ ou de $\mathfrak{S}'$. Je désignerai en général par $\dot{x}$ la matrice (d'ordre $\geqq 1$) conjuguée de x relativement à $\mathfrak{S}$, υ, $\upsilon^\pi (= \dot{\upsilon})$, et j'appellerai *réelles* les matrices dont les éléments sont dans $\mathfrak{S}$.

Considérons le groupe des matrices $\alpha = (\alpha_{ik})$ de $\mathfrak{S}$ d'ordre n telles que $\alpha a \bar{\alpha} = fa$, f désignant un facteur indéterminé ($\bar{\alpha}$ est la transposée de α), et celui des matrices α de $\mathfrak{S}'$ telles que $\dot{\alpha} a \bar{\alpha} = fa$. On peut assimiler a à une forme linéaire $\Sigma a_{ik} x_i y_k$ ($i, k = 1, \ldots, n$) [qui sera dite *forme des deux points* $(x_1, \ldots, x_n)$, $(y_1, \ldots, y_n)$] et α à une substitution. La condition $\alpha a \bar{\alpha} = fa$ donne, en regardant les y comme cogrédients aux x,

$$(1) \qquad \Sigma_{ijkl} a_{ik} \alpha_{ij} \alpha_{kl} x_j y_l = f \Sigma_{jl} a_{jl} x_j y_l \qquad \text{ou} \qquad \Sigma_{ik} a_{ik} \alpha_{ij} \alpha_{kl} = f a_{jl},$$

et la condition $\dot{\alpha} a \bar{\alpha} = fa$, en regardant les y comme subissant la substitution $\dot{\alpha}$ quand les x subissent la substitution α (on peut alors

---

[1] *Voir*, par exemple, mes *Éléments de la Théorie des groupes abstraits* (Gauthier-Villars, 1904), n° 27. Je me servirai, dans ce qui suit, des termes et notations adoptés dans ces *Éléments* et dans mes *Éléments de la Théorie des groupes de substitutions* (Gauthier-Villars, 1912), où l'on trouve une Table de ces termes et notations. Je renverrai au premier Ouvrage par la lettre E et au second par la lettre S.

identifier y_k à $\dot{x}_k$),

$$(2) \qquad \Sigma a_{ik}\alpha_{ij}\dot{\alpha}_{kl} = f a_{jl}.$$

En assimilant chaque colonne de α à un point, on peut dire que la forme a de deux colonnes quelconques (distinctes ou non) de α doit être égale à ce qu'elle devient quand on remplace α par une similitude arbitraire.

Je me bornerai, si $\alpha a \bar{\alpha} = fa$, au cas où $\bar{a} = \pm a$, a étant dans $\mathfrak{S}$, et si $\dot{\alpha} a \bar{\alpha} = fa$, au cas où $\bar{a} = \pm \dot{a}$; alors f est réel, car en comparant les transposées et les conjuguées des deux membres de $\dot{\alpha} a \bar{\alpha} = fa$, on obtient $\dot{f}\dot{a} = f\dot{a}$. a est dite *symétrique* si $\bar{a} = a$, *alternée* ou *gauche* si $\bar{a} = -a$, les a_{ii} étant nuls [1], *hermitienne* si $\bar{a} = \dot{a}$. Si $\bar{a} = -\dot{a}$, $(\nu - \dot{\nu})a$ est évidemment hermitienne.

Si $\alpha a \bar{\alpha} = a$ et $\bar{a} = a$, on peut encore assimiler a à une forme quadratique pour $p \neq 2$. Pour $p = 2$, on ne le peut pas; mais il existe toujours un groupe de substitutions multipliant par f une forme quadratique $\Sigma a_{ik} x_i x_k$ $(i \leqq k)$ que j'appellerai encore a.

Considérons, pour $p \geqq 2$, la forme quadratique $a = \Sigma_{ik} a_{ik} x_i x_k$ $(i \leqq k)$. Les conditions imposées aux coefficients α_{ik} de la substitution α qui multiplie a par f prennent la forme, un peu différente,

$$(3) \qquad \begin{cases} \Sigma_{ik} a_{ik}(\alpha_{ij}\alpha_{kl} + \alpha_{il}\alpha_{kj}) = f a_{jl} & (i \leqq l;\ j \neq l), \\ \Sigma_{ik} a_{ik}\alpha_{ij}\alpha_{kj} = f a_{jj} & (i \leqq k). \end{cases}$$

En disant que a est la forme $a = a(x_1, \ldots, x_n)$ du point $(x_1, \ldots, x_n)$ et $a' = a'(x_1, \ldots, x_n; x'_1, \ldots, x'_n) = \Sigma_{ik} a_{ik}(x_i x'_k + x_k x'_i)$ $(i \leqq k)$ *la polaire de a relativement aux deux points* $(x_1, \ldots, x_n)$, $(x'_1, \ldots, x'_n)$ et en assimilant toujours chaque colonne de α à un point, (3) exprime que la forme a d'une colonne quelconque de α et la polaire de a relative à deux colonnes de α sont égales à ce qu'elles deviennent quand α est remplacée par une similitude.

Les groupes considérés peuvent se réunir sous la notion de *groupe total de a*, en réservant le nom de *groupe de a* au groupe des α pour lesquelles $f = 1$. Le groupe de a sera désigné par $\Lambda(n, \pi, a) = \Lambda(n, \pi)$,

[1] Cette seconde condition ne résulte pas de la première si $p = 2$.

le groupe total de a par $A'(n, \pi, a) = A'(n, \pi)$ [1], et le diviseur de A formé des substitutions de déterminant 1 par

$$A^0(n, \pi, a) = A^0(n, \pi) \ (\equiv A),$$

sauf, à partir du n° **34**, pour $p = 2$. A *et* A^0 *sont évidemment normaux dans* A'.

Les groupes déduits de A^0, A et A' en y regardant les variables comme homogènes seront désignés respectivement par $\mathfrak{A}^0(n, \pi, a) = \mathfrak{A}^0(n, \pi)$, $\mathfrak{A}(n, \pi, a) = \mathfrak{A}(n, \pi)$ et $\mathfrak{A}'(n, \pi, a) = \mathfrak{A}'(n, \pi)$. $\mathfrak{A}^0$ *et* $\mathfrak{A}$ *sont encore normaux dans* $\mathfrak{A}'$. $\mathfrak{A}$ sera dit *groupe homogène de* a, et $\mathfrak{A}'$ *groupe homogène total de* a. Les conditions que vérifient les coefficients de la matrice générale de $\mathfrak{A}$ ou $\mathfrak{A}'$ se déduisent des conditions analogues pour A et A' en multipliant les seconds membres par ϱ^2, ϱ étant indéterminé dans $\mathfrak{S}$ (mais $\neq 0$) si $\alpha a \bar{\alpha} = fa$, et par ϱ si $\alpha a \bar{\alpha} = fa$: mais on ne considérera pas comme distinctes les matrices dont les coefficients sont proportionnels. Lorsque aucune confusion ne sera à craindre, je me servirai des mêmes lettres pour désigner les substitutions de A' et leurs actions sur les mêmes variables regardées comme homogènes.

Je désignerai par $[\mu]_a = [\mu]$, ou simplement par μ quand aucune confusion ne sera à craindre, la similitude de multiplicateur μ opérant sur les variables $x_1, \ldots, x_2$ de a, par ι et ι' des éléments primitifs de $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{S}'$ respectivement, et je poserai $[-1]_a = d(n) = d$, $\{d(n)\} = D(n) = D$, $\{[\iota]_a\} = I$, $\{[\iota']_a\} = I'$, $\{[\iota'^{\pi-1}]_a\} = J$, d'où $IJ = \{[\iota'^2]_a\}$; I^0 sera le diviseur de I dont l'ordre est le p. g. c. d. π_0 de n, $\pi - 1$; J^0 celui de J dont l'ordre est le p. g. c. d. π_1 de n, $\pi + 1$ [2].

Il sera commode de conserver les notations générales précédentes

---

[1] Si l'on a à considérer d'autres variables que celles de a, il peut y avoir d'autres substitutions que celles de A' conservant a à un facteur près, par exemple celles qui agissent sur les seules variables étrangères à a. Mais il restera entendu que, par définition, A et A' laissent inaltérées les variables qui ne figurent pas dans a.

[2] Soient $2^{n'}$ et $2^{\pi'}$ les plus hautes puissances de 2 divisant n et $\pi^2 - 1$ respectivement. Le p. g. c. d. de n, $\pi^2 - 1$ est égal à $2\pi_1$ si $0 < n < \pi'$, à π_1 dans tous les autres cas.

concurremment avec les notations particulières qui vont être introduites pour des variables spéciales de a.

II. — Groupe hermitien.

2. Soit d'abord $\bar{a} = \pm \dot{a}$ et $\dot{\alpha} a \bar{\alpha} = fa$; alors $|\alpha\dot{\alpha}| = |\alpha|^{\pi+1} = f^{n}$, et A et A′ contiennent la conjuguée de chacune de leurs substitutions. Supposons a ou $(\upsilon - \dot{\upsilon})a$ réduite à l'une des deux formes canoniques (¹)

$$h = \Sigma_1^{\nu}(x_i\dot{y}_i - y_i\dot{x}_i) + \omega\eta x_0\dot{x}_0 \qquad (\omega = \upsilon - \dot{\upsilon};\ \eta = 0 \text{ ou } 1). \qquad \varepsilon = \Sigma_1^{n} z_i\dot{z}_i.$$

En posant $x_j = \xi_j + \upsilon\xi'_j$, $y_j = \eta_j - \upsilon\eta'_j$ $(j = 0, \ldots, \nu)$, $\xi_j, \xi'_j, \eta_j, \eta'_j$ étant réels, et $\upsilon + \dot{\upsilon} = -b$, $\upsilon\dot{\upsilon} = c$, on a

$$h = \Sigma_1^{\nu}(\xi_i\eta'_i + \xi'_i\eta_i) + \omega\eta(\xi_0^2 - b\xi_0\xi'_0 + c\xi'^2_0).$$

Donc le type de a considérée comme forme quadratique des parties réelles et imaginaires de ses variables est complètement déterminé par n ($E.$, 44, 45) (²).

(¹) On opère cette réduction comme celle des matrices symétriques ou alternées ($E.$, 192, 195, 201, 202; $S.$, p. 7 et 225), au moyen d'additions, de multiplications, d'échanges de colonnes dans a (ou ωa), chaque opération étant suivie de l'opération conjuguée (ou conjuguée avec changement de signe) sur les lignes.

Pour qu'un changement de variables $x = \alpha x' + \beta y'$, $y = \alpha' x' + \beta' y'$ ramène $\omega(x\dot{y} - y\dot{x})$ à $ax'\dot{x}' + by'\dot{y}'$ (a, b, réels), il faut et suffit que l'on ait

$$\alpha' = \alpha q, \qquad \beta' = \beta\dot{q}, \qquad \omega\alpha\dot{\alpha} = -a(q - \dot{q})^{-1}, \qquad \omega\beta\dot{\beta} = b(q - \dot{q})^{-1},$$

q étant dans Θ' hors de Θ [le déterminant du changement de variables est $\alpha\beta(\dot{q} - q)$]. Le choix de q peut se faire de $\pi^2 - \pi$ manières, et chacun des coefficients α, β a alors $\pi + 1$ déterminations ($p \geq 2$) ($E.$, 44, 45).

(²) On peut aussi le voir en partant de ε. Soit $z_i = \zeta_i + \upsilon\zeta'_i$, ζ_i et ζ'_i étant réels. Si $p > 2$, le discriminant de $\varepsilon = \Sigma(\zeta_i^2 - b\zeta_i\zeta'_i + c\zeta'^2_i)$ est $(4c - b^2)^n$ dont le caractère quadratique est déterminé par n ($b^2 - 4c$ est non carré). Si $p = 2$, en remplaçant ζ_i par $\zeta_i + \zeta_k$ et ζ'_k par $\zeta_k + \zeta_i$, on fait disparaître les termes ζ_k^2 et $c\zeta'^2_i$; en prenant alors $\zeta_i - b\zeta'_i$ pour ζ'_i et $-b\zeta_k + c\zeta_k$ pour ζ'_k, on fait disparaître ζ_i^2 et $c\zeta'^2_k$. De là, pour $p \geq 2$, le même résultat qu'au texte ($E.$, 44, 45).

Pour $a = h$ ou $a = \varepsilon$, A sera dit *groupe hermitien n—aire de* $\mathfrak{S}$, et $\mathfrak{A}$ *groupe hermitien homogène ou fractionnaire n—aire de* $\mathfrak{S}$. Je préciserai les formes correspondantes de A, $\mathfrak{A}$, A^0, $\mathfrak{A}^0$, A', $\mathfrak{A}'$ en remplaçant partout les lettres A, $\mathfrak{A}$ par H, $\mathfrak{H}$ si $a = h$, par E, $\mathfrak{E}$ si $a = \varepsilon$.

Il est clair que, si β est primitif dans $\mathfrak{S}'$ donc $\beta^{\pi+1}$ dans $\mathfrak{S}$, $A' = \Sigma_0^{\pi-2} A\beta^k = AI'$; le complexe $A\beta^k$ est formé des substitutions qui multiplient a par $\beta^{k(\pi+1)}$. De même, si γ est la substitution de H' qui multiplie chaque x_i où $i \neq 0$ par $\beta^{\pi+1}$ et $x_0 = x$ par β sans altérer les y_i, $H' = \Sigma_0^{\pi-2} H\gamma^k$.

Posons

$$m_{i\rho} = \begin{vmatrix} x_i & \rho x_i \\ y_i & \rho^{-1} y_i \end{vmatrix} (i \neq 0), \qquad m_{0\chi} = |x, \chi^x|, \qquad m_\chi = |z_n, \chi^{z_n}|,$$

les variables non écrites étant inaltérées. *Si χ ou $\rho\rho^{-1}$ est d'ordre $\pi + 1$* (alors ρ est de la forme ι'^σ, σ étant premier à $\pi + 1$) (¹), on aura encore, $m_{i\rho}^{\pi+1}$ étant évidemment dans H^0,

$$H = \Sigma_0^\pi H^0 m_{i\rho}^k = \Sigma_0^\pi H^0 m_{0\chi}^k, \qquad E = \Sigma_0^\pi E^0 m_\chi^k,$$

et, en désignant par s une des substitutions $m_{i\rho}$, $m_{0\chi}$, m_χ suivant le cas, chaque complexe $A^0 s^k = s^k A^0$ est formé des substitutions de $A = \{s\} A^0$ dont le déterminant est $(\rho\rho^{-1})^k$ ou χ^k.

Il est clair que, pour $n = 1$, $H^0 = E^0 = 1$.

Par définition $\mathfrak{A}' = A'|I'$, et $\mathfrak{A} = AI'|I = A'I'$. Donc $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A} \equiv A|J$. De même $\mathfrak{A}^0 = A^0 I'|I' \equiv A^0|J^0 \equiv A^0 J|J$. Donc $\mathfrak{A}|\mathfrak{A}^0 \equiv A'|A^0 I' \equiv A|A^0 J$, et $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^0) = \pi_1$.

Soit ζ une substitution de A hors de A^0 et ζ_0 une substitution de A^0. Si ζ^y est dans $A^0 I'$, $(\zeta\zeta_0)^y$ y sera aussi, et réciproquement. Prenons donc $\zeta = s$, et soit $s^y = \alpha\iota'^z$, α étant dans A^0. Il faut évidemment pour cela que l'on ait, en supposant $a = \varepsilon$, $s = m_\chi$,

$$\alpha_{11} = \ldots = \alpha_{n-1,n-1}, \qquad \alpha_{11}\iota'^z = 1, \qquad \alpha_{nn}\iota'^z = \chi^y, \qquad \text{donc} \qquad \alpha_{nn} = \alpha_{11}\chi^y.$$

D'ailleurs, α conservant ε et étant dans A^0, on a aussi

$$\alpha_{ii}\dot{\alpha}_{ii} = 1 \qquad (i = 1, \ldots, n), \qquad \alpha_{11}^{n-1}\alpha_{nn} = 1,$$

(¹) $\beta\gamma^{-1} = H_1^\gamma m_{i,\beta^{-1}}$.

et ces conditions suffisent. Ainsi α_{11} est de la forme $t'^{\rho(\pi-1)}$, α_{nn} de la forme $t'^{\sigma(\pi-1)}$, et $(n-1)\rho+\sigma\equiv 0 \bmod(\pi+1)$. D'ailleurs γ a la forme $t'^{\tau(\pi-1)}$ (τ premier à $\pi+1$), et $\sigma-\rho-\tau y\equiv 0 \bmod(\pi+1)$. Donc, en éliminant σ,

$$\rho n+\tau y\equiv 0 \qquad \bmod \pi+1.$$

Mais τ est premier à $\pi+1$. Donc y doit être divisible par π_1, et cela suffit. Donc $A'=\Sigma_0^{\pi_1-1}A^0 I' s^k$, et, en regardant les variables comme homogènes, $\mathcal{A}'=\mathcal{A}=\Sigma_0^{\pi_1-1}\mathcal{A}_0^0 s^k$.

3. Soit

$$\alpha=\left|\begin{matrix} x_i & \Sigma_k(\alpha_{ik}x_k+\alpha'_{ik}y_k)=X_i \\ y_i & \Sigma_k(\beta_{ik}x_k+\beta'_{ik}y_k)=Y_i \end{matrix}\right| \qquad (i,\ k=1,\ \ldots,\ \nu,\ 0)$$

une substitution de H', en convenant de supprimer ou de remplacer par o toutes les quantités relatives à y_0 et de même, si $\eta=0$, celles relatives à x_0 [ainsi $(1-\eta)\alpha_{i0}=(1-\eta)\beta_{i0}=0$, $\alpha'_{i0}=\beta'_{i0}=0 (i\geqq 0)$]. La considération des coefficients de $x_j\dot{x}_k$, $y_j\dot{y}_k$, $x_j\dot{y}_k$ dans la transformée de a par α donne, pour le développement de la condition $\dot{\alpha}a\bar{\alpha}=fa$ (*cf.* **1**),

$$(4)\quad \Sigma_{i=1}^{\nu}(\alpha_{ij}\dot{\beta}_{ik}-\beta_{ij}\dot{\alpha}_{ik})+\omega\eta\alpha_{0j}\dot{\alpha}_{0k}=\begin{cases} 0 \text{ sauf si } j=k=0 \\ f\omega\eta \quad \text{si } j=k=0 \end{cases} \qquad (j,\ k\geqq 0),$$

$$(5)\quad \Sigma_{i=1}^{\nu}(\alpha'_{ij}\dot{\beta}'_{ik}-\beta_{ij}\dot{\alpha}'_{ik})+\omega\eta\alpha'_{0j}\dot{\alpha}'_{0k}=0 \qquad (j,\ k\neq 0),$$

$$(6)\quad \Sigma_{i=1}^{\nu}(\alpha_{ij}\dot{\beta}'_{ik}-\beta_{ij}\dot{\alpha}'_{ik})+\omega\eta\alpha_{0j}\dot{\alpha}'_{0k}=\begin{cases} 0 \text{ si } j\neq k \\ f \text{ si } j=k \end{cases} \qquad (j\geqq 0,\ k\neq 0)$$

[le coefficient de $\dot{x}_j y_k$ conduit à la conjuguée de (6)].

L'équation $\dot{\alpha}a\bar{\alpha}=fa$ donne $f\dot{\alpha}^{-1}=\bar{\alpha}a^{-1}$. Or

$$a^{-1}=\Sigma_1^{\nu}(y_i\dot{x}_i-x_i\dot{y}_i)+\frac{\eta}{\omega}x_0\dot{x}_0 \quad (^1).$$

---

(1) On voit que si $\eta=0$ ou si $\omega^2=-1$, $a^{-1}=-a$. Alors l'équation précédente donne $\bar{\alpha}a\dot{\alpha}=fa$, et H et H' contiennent la transposée de chacune de leurs substitutions. Si l'on prend $a=\varepsilon$, la condition $\dot{\alpha}a\bar{\alpha}=fa$ s'écrit $\dot{\alpha}\bar{\alpha}=f\varepsilon$; E et E' contiennent donc toujours la transposée de chacune de leurs substitutions.

Donc, en posant

$$\alpha^{-1} = \begin{vmatrix} x_i & \Sigma_k(A_{ik}x_k + A'_{ik}y_k) = X'_i \\ y_i & \Sigma_k(B_{ik}x_k + B'_{ik}y_k) = Y'_i \end{vmatrix} \qquad (i, k = 1, \ldots, \nu, 0),$$

$$(1-\eta)A_{i0} = (1-\eta)B_{i0} = A'_{i0} = B'_{i0} = 0 \qquad \text{pour} \qquad i = 1, \ldots, \nu, 0,$$

on a

$$(7)\quad \begin{cases} fA_{ik} = \dot{\beta}'_{ki}, \quad fA'_{ik} = -\dot{\alpha}'_{ki}, \quad fB_{ik} = -\dot{\beta}_{ki}, \quad fB'_{ik} = \dot{\alpha}_{ki} & (i, k \neq 0); \\ fA_{i0} = \omega\eta\dot{\alpha}'_{0i}, \quad fB_{i0} = -\omega\eta\dot{\alpha}_{0i}, \quad fA_{0k} = \dfrac{\eta}{\omega}\dot{\beta}_{k0}, \quad fA'_{0k} = -\dfrac{\eta}{\omega}\dot{\alpha}_{k0} & (i, k \neq 0); \\ fA_{00} = \eta\alpha_{00}. \end{cases}$$

L'équation (4) écrite pour α^{-1} donne donc (α^{-1} multiplie a par f^{-1})

$$(8)\quad \begin{cases} \omega\Sigma_{i=1}^{\nu}(\beta_{ki}\dot{\beta}_{ji} - \dot{\beta}_{ji}\beta'_{ki}) + \eta\beta_{k0}\dot{\beta}_{j0} = 0 & (j, k \neq 0), \\ \omega\eta\Sigma_{i=1}^{\nu}(\dot{\alpha}'_{0i}\beta_{ki} - \dot{\alpha}_{0i}\beta'_{ki}) + \eta\dot{\alpha}_{00}\beta_{k0} = 0 & (k \neq 0) \quad (^1), \\ \omega\eta\Sigma_{i=1}^{\nu}(\dot{\alpha}_{0i}\alpha'_{0i} - \dot{\alpha}'_{0i}\alpha_{0i}) + \eta\alpha_{00}\dot{\alpha}_{00} = fc. \end{cases}$$

L'équation (5) donne de même ([2])

$$(9)\qquad \omega\Sigma_{i=1}^{\nu}(\alpha_{ki}\dot{\alpha}'_{ji} - \dot{\alpha}_{ji}\alpha'_{ki}) + \eta\alpha_{k0}\dot{\alpha}_{j0} = 0 \qquad (j, k \neq 0),$$

et l'équation (6)

$$(10)\quad \begin{cases} \omega\Sigma_{i=1}^{\nu}(\alpha_{ki}\dot{\beta}'_{ji} - \dot{\beta}_{ji}\alpha'_{ki}) + \eta\alpha_{k0}\dot{\beta}_{j0} = \begin{cases} 0 \text{ si } j \neq k \\ f \text{ si } j = k \end{cases} & (j, k \neq 0), \\ \omega\eta\Sigma_{i=1}^{\nu}(\alpha_{ki}\dot{\alpha}'_{0i} - \dot{\alpha}_{0i}\alpha'_{ki}) + \eta\alpha_{k0}\dot{\alpha}_{00} = 0 & (k \neq 0). \end{cases}$$

Les conditions (8), (9), (10) sont *a priori* équivalentes à (4), (5), (6) ([3]).

Si l'on prend $a = \varepsilon = (\varepsilon_{ik})$, la condition $\dot{\alpha}\bar{\alpha} = f\varepsilon$ donne $\Sigma_i\alpha_{ik}\dot{\alpha}_{il} = f\varepsilon_{kl}$ qui remplace (4), (5), (6). En formant ce système d'équations

---

([1]) En faisant dans (4) $k = 0$, on obtient la conjuguée de cette seconde formule (8).

([2]) On suppose *dans cette réduction* j et k non nuls. Aussi, bien que (5) subsiste pour j ou k nul, il n'en est pas de même de (9).

([3]) On remarquera que (8), (9), (10) sont formées avec les lignes de α comme (4), (5), (6) avec ses colonnes.

pour $\alpha^{-1} - \dot{\bar{\alpha}}$, on obtient le système équivalent $\Sigma_i \dot{\alpha}_{ki}\alpha_{li} = f\varepsilon_{kl}$ qui remplace (8), (9), (10).

4. Désignons maintenant par $(4)_l$, $(5)_l$, $(6)_l$, $(8)_l$, $(9)_l$, $(10)_l$ ce que deviennent (4), (5), (6), (8), (9), (10) pour $j = k = l$.

H *contient une substitution* α *dont les colonnes répondant à* x_l, y_l *(en négligeant* y_l *si* $l = 0$*) forment une solution de* $(4)_l$, $(5)_l$, $(6)_l$ *pour* $f = 1$. Car soit τ une substitution n — aire ayant pour colonnes répondant à x_l, y_l les colonnes données, et $\dot{\tau} a \bar{\tau} = a'$. En désignant par $F(x_l, y_l)$ une forme égale à $x_l\dot{y}_l - y_l\dot{x}_l$ si $l \neq 0$ (on peut alors faire $l = 1$) et à $\omega\eta_1 x\dot{x}$ si $l = 0$, on peut écrire $a' = F(x_l + u, y_l + v) + a_l$, u, v, a_l ne contenant plus x_l ni y_l [1]. Si donc τ_1 est la substitution qui remplace x_l par $x_l - u$ et y_l par $y_l - v$, donc a' par $F(x_l, y_l) + a_l$, et τ_2 une substitution des x_i, y_i où $i \neq l$ réduisant a_l à $a - F(x_l, y_l)$, $\tau_2\tau_1\tau$ répond à la question. On voit directement [en cherchant une substitution σ de H telle que $\sigma\alpha$ ait les mêmes colonnes répondant à x_l, y_l (ou la même colonne répondant à x_0 si $l = 0$)] que *les substitutions de cette sorte forment le complexe* $H_l\alpha_0$, α_0 *étant l'une d'elles, et* H_l *le diviseur de* H *formé des substitutions qui remplacent les* x_i, y_i *où* $i \neq l$ *par des fonctions de ces seules variables et* x_l, y_l *par* $x_l + X$, $y_l + Y$, X *et* Y *ne dépendant pas de* x_l, y_l *(en négligeant toujours* y_l *si* $l = 0$*)*. Or les conditions (4), (5), (6) où l'on fait un des seconds indices égal à l montrent que $X = Y = 0$, et que H_l *est le groupe des substitutions de* $a - F(x_l, y_l)$. H_l *est donc semblable à* $H(n-2, \pi)$ *si* $l \neq 0$, *et à* $H(n-1, \pi)$ *si* $l = 0$.

De même les substitutions de H *dont les lignes répondant à* x_l

---

[1] D'après la construction de τ, a' a, pour $l \neq 0$, la forme

$$F(x_l, y_l) + x_l\dot{X} - \dot{X}x_l + y_l\dot{Y} - \dot{Y}y_l + Z$$

et, pour $l = 0$, la forme

$$\omega x\dot{x} + \omega(x\dot{X} + X\dot{x}) + Z.$$

X, Y et $Z = (-\dot{Z})$ ne dépendant pas de x_l, y_l. D'où, par des changements de notation, la forme du texte.

et y_l (*en négligeant* y_l *si* $l=0$) *constituent une solution donnée de* $(8)_l$, $(9)_l$, $(10)_l$ *pour* $f=1$ *forment le complexe* $\alpha_0 H_l$, α_0 *étant l'une d'elles qui existe toujours.*

Or pour $n>1$ et $l=1$, l'équation $(4)_1$ (que l'on peut considérer comme liant les parties réelles et imaginaires des coefficients) a, d'après le type de h, $[\pi^n-(-1)^n][\pi^{n-1}-(-1)^{n-1}]$ solutions autres que $0, 0, \ldots, 0$ (*E.*, 44, 45). Il s'agit de calculer le nombre m_Σ des solutions de $(5)_1$, $(6)_1$ répondant à une solution autre que $0, 0, \ldots, 0$ de $(4)_1$ [à la solution $0, 0, \ldots, 0$ de $(4)_1$ ne répond aucune solution de $(5)_1$, $(6)_1$]. m_Σ ne change évidemment pas quand on transforme linéairement les coordonnées des *points* Σ, Σ'. Or si l'on fait subir à ces coordonnées une même substitution s de H, $(4)_1$, (5_1), $(6)_1$ restent inaltérées (elles deviennent les mêmes conditions relatives à la substitution αs de H). D'ailleurs H contient une substitution transformant $\Sigma_0=(1, 0, 0, \ldots, 0)$ en Σ (par exemple α). Donc, pour calculer m_Σ, on peut remplacer Σ par Σ_0 [1]. Alors $\beta'_{11}=1$, et $(5)_1$ permet de prendre arbitrairement les α'_{i1}, β'_{i1} où $i\neq 1$; la partie imaginaire de α'_{11} est alors déterminée. Donc $m_\Sigma=\pi^{2n-3}$. L'ordre de H pour $n=1$ est d'ailleurs $\pi+1$, et pour $n=2$, d'après ce qu'on vient vient de voir, $\pi(\pi+1)(\pi^2-1)$. *Donc l'ordre de* $H(n, \pi)$ *est* $\pi^{\frac{n(n-1)}{2}}\Pi_1^n[\pi^i-(-1)^i]$.

On voit de même que *les substitutions* α *de* E *dont la* $n^{\text{ième}}$ *colonne* (*ligne*) *est une solution donnée autre que* $0, 0, \ldots, 0$ *de* $\Sigma_i \alpha_{ii}\alpha_{ii}=1$ ($\Sigma_i \alpha_{li}\alpha_{li}=1$) *forment le complexe* $E_l\alpha_0(\alpha_0 E_l)$, $E_l=E(n-1, \pi)$ *étant le groupe de* $\varepsilon-x_l x_l$, *et* α_0 *étant l'une d'elles qui existe toujours.* On en déduit plus simplement l'ordre de E; mais la démonstration précédente est utile pour la suite.

La même méthode fournirait des résultats généraux analogues pour

---

[1] On peut donner au raisonnement précédent une forme un peu différente. Les diverses déterminations s_1 s_2, ... de α_0 formant un système de restes de H (mod H_1, 1), il en sera de même de $s_1\sigma$, $s_2\sigma$, ..., σ étant quelconque dans $H(=H\sigma)$. De plus, si s_i et s_k ont une même première colonne, il en sera de même de $s_i\sigma$, $s_k\sigma$, et réciproquement. En faisant $\sigma=s_i^{-1}$, on voit que le nombre des s_i ayant une même première colonne est égal à celui des s_i dont la première colonne est $1, 0, 0, \ldots, 0$, c'est-à-dire que m_Σ est indépendant de Σ.

le complexe ($\geqq 1$) des substitutions de H dont les colonnes (lignes) répondant à $x_{l_1}, y_{l_1}; x_{l_2}, y_{l_2}, \ldots$ sont données, vérifiant (4), (5), (6), et pour le complexe ($\geqq 1$) des substitutions de E dont plusieurs colonnes (lignes) sont données, vérifiant les conditions correspondantes.

5. Soit $n = 2$. Posons $|\alpha| = \delta$. L'équation $\alpha_{11}\beta'_{11} - \beta_{11}\alpha'_{11} = \delta$ jointe à (4) donne, d'après (6), $f\alpha_{11} = \alpha_{11}\delta$, $f\beta_{11} = \beta_{11}\delta$; jointe à (5), elle donne de même $f\alpha'_{11} = \alpha'_{11}\delta$, $f\beta'_{11} = \beta'_{11}\delta$. Or $\delta^{\pi+1} = 1$ (**2**). Donc on peut trouver ρ tel que $\rho^{\pi-1} = \delta$. Donc, pour $f = 1$, les coefficients de α multipliés par ρ deviennent réels. Donc le groupe des *matrices* de $\mathcal{H}(2, \pi)$ divise celui des *matrices* de $\mathcal{L}(2, \pi)$ (*S.*, 77) [les deux groupes n'ont pas le même champ (*cf.* **15**)]. Donc, d'après leurs ordres, $\mathcal{H}(2, \pi) \equiv \mathcal{L}(2, \pi)$, et $\mathcal{H}^0(2, \pi) \equiv \mathcal{O}(2, \pi)$ (*cf.* *S.*, 79). Pour $\delta = 1$, les coefficients eux-mêmes sont réels. Donc $H^0(2, \pi) \equiv U(2, \pi)$, les matrices des deux groupes étant les mêmes [mais non leurs champs (*cf.* **12**)]. Il est clair que $H(2, \pi) \equiv \{U(2\pi), m_{1\omega}\}$.

6. $H^0(n, \pi)$ contient évidemment les substitutions

$$\tau_i = \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ y_i & -x_i \end{vmatrix}, \qquad u_{i\lambda} = | \; x_i \quad x_i + \lambda y_i \; |, \qquad V_{ik\rho} = \begin{vmatrix} x_i & x_i + \rho x_k \\ y_k & y_k - \rho y_i \end{vmatrix},$$

$$V_{0k\rho} = \begin{vmatrix} x & x + \rho x_k \\ y_k & y_k + \omega\dot{\rho} x + \rho\dot{\rho}\upsilon x_k \end{vmatrix} \text{ si } \eta = 1 \quad (^1); \qquad V_{0k\rho} = 1 \text{ si } \eta = 0$$

($i, k \neq 0$; λ réel; les variables non écrites sont inaltérées)

et leurs combinaisons

$$v_{i\lambda} = \tau_i^{-1} u_{i,-\lambda} \tau_i = \tau_i u_{i,-\lambda} \tau_i^{-1} = | \; y_i \quad y_i + \lambda x_i \; |,$$

$$m_{i\lambda} = v_{i\lambda} u_{i,-\lambda^{-1}} v_{i\lambda} \tau_i = \tau_i^{-1} u_{i\lambda} v_{i,-\lambda^{-1}} u_{i\lambda} = \begin{vmatrix} x_i & \lambda x_i \\ y_i & \lambda^{-1} y_i \end{vmatrix} \quad (^2),$$

$$U_{ik\rho} = U_{ki\rho} = \tau_k^{-1} V_{ik,-\rho} \tau_k = \tau_k V_{ik\rho} \tau_k^{-1} = \begin{vmatrix} x_i & x_i + \rho y_k \\ x_k & x_k + \dot{\rho} y_i \end{vmatrix},$$

(1) Pour qu'une substitution remplaçant x par $x + \rho x_k$ et conservant x_k laisse $x_k \dot{y}_k - y_k \dot{x}_k + \omega x \dot{x}$ inaltérée, il faut et suffit, on le vérifie directement, qu'elle remplace y_k par $y_k + \omega\dot{\rho} x + (\lambda + \rho\dot{\rho}\upsilon) x_k$, λ étant indéterminé *dans* Θ. Je prends ici $\lambda = 0$.

(2) Comme $m_{i,-1} = \tau_i^2$, cette équation donne $\tau_i = v_{i,-1} u_{i1} v_{i,-1} = u_{i1} v_{i,-1} u_{i1}$. Donc les m et les τ s'expriment par les u et les v (*cf.* *S.*, 83, 3; *E.*, 192, 202).

$$U_{0k\rho} = U_{k0\rho} = \tau_k^{-1} V_{0k,-\rho} \tau_k = \tau_k V_{0k\rho} \tau_k^{-1} = \begin{vmatrix} x & x + \rho y_k \\ x_k & x_k - \omega\dot{\rho} x - \rho\dot{\rho} y_k \end{vmatrix},$$

$$W_{ik\rho} = W_{ki\dot{\rho}} = \tau_i^{-1} V_{ik,-\rho} \tau_i = \tau_i V_{ik\rho} \tau_i^{-1} = \begin{vmatrix} y_i & y_i + \rho x_k \\ y_k & y_k + \dot{\rho} x_i \end{vmatrix},$$

$$R_{ik\rho} = V_{ik\rho} V_{ki,-\rho^{-1}} V_{ik\rho} = \begin{vmatrix} x_i & \rho x_k \\ y_i & \dot{\rho}^{-1} y_k \\ x_k & -\rho^{-1} x_i \\ y_k & -\dot{\rho} y_i \end{vmatrix},$$

$$S_{ik\rho} = \tau_k^{-1} R_{ik\rho} \tau_k = \tau_k R_{ik\rho} \tau_k^{-1} = \begin{vmatrix} x_i & -\rho y_k \\ y_i & \dot{\rho}^{-1} x_k \\ x_k & -\dot{\rho} y_i \\ y_k & \rho^{-1} x_i \end{vmatrix},$$

$$T_{ik} = m_{i,-\lambda} m_{k\lambda}^{-1} R_{ik\lambda} = R_{ik\lambda} m_{i\lambda}^{-1} m_{k,-\lambda} = \tau_i \tau_k m_{i\lambda} m_{k\lambda} S_{ik\lambda}$$

$$= S_{ik\lambda} m_{i\lambda}^{-1} m_{k\lambda}^{-1} \tau_i \tau_k = \begin{vmatrix} x_k & x_k \\ y_i & y_k \\ x_k & x_i \\ y_k & y_i \end{vmatrix}.$$

Il sera souvent commode de négliger le dernier indice dans les $u_{i\lambda}$, $v_{i\lambda}$, $m_{i\lambda}$, $V_{ik\rho}$, $U_{ik\rho}$, $W_{ik\rho}$ et dans la substitution $m_{i\rho}$ du n° **2**.

7. Il est utile de réunir ici certaines relations entre ces substitutions et les substitutions $m_{i\rho}$ (ρ dans $\mathfrak{S}'$; *cf.* **2**), $m_{0\theta}$ ($\theta^{\pi+1} = 1$) de H [1] :

$$(11)\quad \begin{cases} \tau_i^1 = u_i^p = V_{ik\rho}^p = 1, \qquad \tau_i^2 = m_{i,-1} \qquad (\text{si } p = 2,\ \tau_i^2 = 1), \\ \tau_i^{-2} V_{ik\rho} \tau_i^2 = V_{ik,-\rho}, \qquad \tau_k^{-2} V_{jk\rho} \tau_k^2 = V_{jk,-\rho} \qquad (j \geqq 0); \\ V_{0k\rho}^{m} = V_{0k,m\rho} v_{k,\frac{m(m-1)}{2}\eta b\rho\dot{\rho}}, \qquad b = -\upsilon - \dot{\upsilon}. \\ \text{d'où} \\ V_{0k\rho}^{-1} = V_{0k,-\rho} v_{k,\eta b\rho\rho}, \qquad V_{0k\rho}^p = \begin{cases} 1 & \text{pour } p > 2, \\ v_{k,\eta b\rho\dot{\rho}} & \text{pour } p = 2, \end{cases} \\ U_{0k\rho}^{-1} = U_{0k,-\rho} u_{k,-\eta b\rho\rho}, \qquad U_{0k\rho}^p = \begin{cases} 1 & \text{pour } p > 2, \\ u_{k,-\eta b\rho\dot{\rho}} & \text{pour } p = 2, \end{cases} \end{cases}$$

---

[1] Les formules (13), (16), 18), (20), se tirent des formules (12), (15), (17), (19) respectivement en transformant ces dernières par des τ.

$$(12)\quad \begin{cases} V_{ikp}\,u_{i\lambda} = u_{i\lambda}\,V_{ikp}, & V_{jkp}\,v_{k\lambda} = v_{k\lambda}\,V_{jkp} \quad (j \geq 0), \\ u_{k\lambda}^{-1}\,V_{ikp}\,u_{k\lambda} = V_{ikp}\,U_{ik,-\lambda p}\,u_{i,-\lambda p\dot{p}}, & v_{i\lambda}^{-1}\,V_{ikp}\,v_{i\lambda} = V_{ikp}\,W_{ik,\lambda p}\,v_{k,\lambda p\dot{p}}, \end{cases}$$

$$(13)\quad \begin{cases} U_{jkp}\,u_{k\lambda} = u_{k\lambda}\,U_{jkp} \quad (j \geq 0), & v_{k\lambda}^{-1}\,U_{ikp}\,v_{k\lambda} = U_{ikp}\,V_{ik,-\lambda p}\,u_{i,-\lambda p\dot{p}}, \\ W_{ikp}\,v_{i\lambda} = v_{i\lambda}\,W_{ikp}, & u_{k\lambda}^{-1}\,W_{ikp}\,u_{k\lambda} = W_{ikp}\,V_{ki,\lambda\dot{p}}\,v_{i,\lambda p\dot{p}}, \end{cases}$$

$$(14)\quad \begin{cases} V_{0kp}\,V_{0k\sigma} = V_{0k,p+\sigma}\,v_{k,-\eta(p\sigma\dot{\upsilon}+\dot{p}\sigma\upsilon)} = V_{0k\sigma}\,V_{0kp}\,v_{k,\omega\eta(\dot{p}\sigma-\dot{\sigma}p)}, \\ U_{0kp}\,U_{0k\sigma} = U_{0k,p+\sigma}\,u_{k,\eta(p\dot{\sigma}\dot{\upsilon}+p\sigma\upsilon)} = U_{0k\sigma}\,U_{0kp}\,u_{k,\omega\eta(p\sigma-\sigma\dot{p})}\ (^1), \end{cases}$$

$$(15)\quad \left.\begin{cases} V_{ikp}\,V_{il\sigma} = V_{il\sigma}\,V_{ikp} \quad (k \neq l \text{ ou } k = l) \\ V_{ikp}\,V_{lk\sigma} = V_{lk\sigma}\,V_{ikp} \quad (i \neq l \text{ ou } i = l) \\ V_{kl\sigma}^{-1}\,V_{ikp}\,V_{kl\sigma} = V_{ikp}\,V_{il,-p\sigma} \\ V_{ik\sigma}^{-1}\,U_{ikp}\,V_{ik\sigma} = U_{ikp}\,u_{i,p\sigma+p\sigma} \end{cases}\right\} \quad (i,\ k,\ l \neq 0),$$

$$(16)\quad \left.\begin{cases} U_{ikp}\ V_{il\sigma} = V_{il\sigma}\ U_{ikp} \quad (k \neq l) \\ U_{ikp}\ U_{il\sigma} = U_{il\sigma}\ U_{ikp} \quad (k \neq l \text{ ou } k = l) \\ W_{ikp}\ W_{il\sigma} = W_{il\sigma}\,W_{ikp} \quad (k \neq l \text{ ou } k = l) \\ W_{ikp}\ V_{lk\sigma} = V_{lk\sigma}\,W_{ikp} \quad (i \neq l), \\ U_{kl\sigma}^{-1}\ V_{ikp}\ U_{kl\sigma} = V_{ikp}\,U_{il,-p\sigma} \\ W_{kl\sigma}^{-1}\ U_{ikp}\ W_{kl\sigma} = U_{ikp}\ V_{il,-p\sigma} \\ V_{kl\sigma}^{-1}\ W_{ikp}\ V_{kl\sigma} = W_{ikp}\,W_{il,-p\sigma} \\ W_{ik\sigma}^{-1}\ V_{kip}\ W_{ik\sigma} = V_{kip}\ v_{i,-p\sigma-\dot{p}\dot{\sigma}} \end{cases}\right\} \quad (i,\ k,\ l \neq 0),$$

$$(17)\quad \left.\begin{cases} V_{0kp}\,V_{ik\sigma} = V_{ik\sigma}\,V_{0kp} \\ V_{0i\sigma}^{-1}\,U_{0kp}\,V_{0i\sigma} = U_{0kp}\,V_{ki,\eta\omega\dot{p}\sigma} \\ U_{0i\sigma}^{-1}\,U_{0kp}\,U_{0i\sigma} = U_{0kp}\,U_{ki,\eta\omega p\sigma} \\ U_{ik\sigma}^{-1}\,V_{0kp}\,U_{ik\sigma} = V_{ik,\eta p\dot{p}\sigma\upsilon}\,U_{0i,-p\sigma}\,V_{0kp} \end{cases}\right\} \quad (i,\ k \neq 0),$$

$$(18)\quad \left.\begin{cases} U_{0kp}\ U_{ik\sigma} = U_{ik\sigma}\,U_{0kp} \\ U_{0kp}\ V_{ki\sigma} = V_{ki\sigma}\,U_{0kp} \\ V_{0kp}\,W_{ik\sigma} = W_{ik\sigma}\,V_{0kp} \\ V_{ik\sigma}^{-1}\,U_{0kp}\ V_{ik\sigma} = U_{ik,-\eta p\dot{p}\sigma\upsilon}\,U_{0i,p\dot{\sigma}}\ U_{0kp} \\ W_{ik\sigma}^{-1}\,U_{0kp}\,W_{ik\sigma} = V_{ki,-\eta p\dot{p}\sigma\dot{\upsilon}}\ V_{0i,-p\sigma}\,U_{0kp} \\ V_{ki\sigma}^{-1}\,V_{0kp}\ V_{ki\sigma} = W_{ki,\eta p\dot{p}\sigma\dot{\upsilon}}\ V_{0i,\ p\sigma}\,V_{0kp} \end{cases}\right\} \quad (i,\ k \neq 0),$$

$$(19)\quad \begin{cases} \tau_i^{-1}\,m_{ip}\,\tau_i = m_{i,p^{-1}}, & m_{ip}^{-1}\,u_{i\lambda}\,m_{ip} = u_{i,\lambda p\dot{p}}, \\ m_{i\sigma}^{-1}\,V_{ikp}\,m_{i\sigma} = V_{ik,p\sigma}, & m_{k\sigma}^{-1}\,V_{jkp}\,m_{k\sigma} = V_{jk,p\sigma}, \quad (j \geq 0), \\ m_{00}^{-1}\,V_{0kp}\,m_{00} = V_{0k,0p} & (\theta^{\pi+1} = 1), \\ (i,\ k \neq 0;\ p,\ \sigma \text{ dans } \mathfrak{S}'), \end{cases}$$

---

(1) D'après (11) et (14) on peut omettre les générateurs u si n est impair.

$$(20)\quad \begin{cases} m_{i\rho}^{-1} v_{i\lambda} m_{i\rho} = v_{i,\lambda(\rho\dot{\rho})^{-1}}, \\ m_{i\sigma}^{-1} U_{ij\rho} m_{i\sigma} = U_{ij,-\rho\sigma} \quad (j \neq 0), \qquad m_{k\sigma}^{-1} W_{ik\rho} m_{k\sigma} = W_{ik,\rho\sigma}, \\ m_{0\theta}^{-1} U_{0k\rho} m_{0\theta} = U_{0k,\theta\rho} \qquad (\theta^{\pi+1} = 1), \\ \qquad\qquad (i,\ k \neq 0;\ \rho,\ \sigma \text{ dans } \mathfrak{S}'), \end{cases}$$

$$(21)\quad \begin{cases} R_{ik\rho} S_{ik\sigma} = S_{ik\sigma} R_{ik\rho} = \begin{vmatrix} x_i & \dot{\rho}\sigma y_i \\ y_i & -(\rho\dot{\sigma})^{-1} x_i \\ x_k & -\dot{\sigma}\dot{\rho}^{-1} \ y_k \\ y_k & \rho\sigma^{-1} \ x_k \end{vmatrix} = \tau_i \tau_k^{-1} m_{i,\dot{\rho}\sigma} m_{k,\dot{\sigma}\dot{\rho}^{-1}}, \\ V_{0i,\rho_1\dot{\rho}^{-1}} U_{0i,-1} u_{i,-\rho_0\rho_1} V_{0i,-\rho_1\rho^{-1}} = \tau_i^{-1} u_{i,\rho_0\rho_1\rho\dot{\rho}^{-1}} m_{i\rho} m_{0,\dot{\rho}\rho^{-1}} m_{i,\dot{\rho}_1^{1}} v_{i,-\rho_0\rho_1\rho\dot{\rho}^{-1}}, \\ \qquad\qquad (\rho = \rho_0 + \upsilon\rho_1). \end{cases}$$

La première formule (21) donne, pour $\sigma = \rho$, l'expression de $m_{i\lambda}$ (λ réel) par les V et les τ, et, pour $\rho = 1$, celle de $m_{i\rho} m_{k\rho}^{-1}$ par les générateurs de H_0; la seconde donne l'expression de $m_{i\rho} m_{0,\dot{\rho}\rho^{-1}}$ par les mêmes générateurs.

8. $H^0(n, \pi)$ *dérive des* τ, *des* u *et des* $V[H_0(1, \pi) = 1$, $H_0(2, \pi)$ (**2**, **3**, **4**)], *et, si* n *est impair, on peut* [*d'après* (14)] *omettre les* u.

Il suffit de montrer que, α étant dans H^0, on peut, en la multipliant à droite par des τ, u, V, la réduire à une substitution de H_1(**3**), et l'on peut supposer $n > 2$ (**4**). Les α_{i1}, β_{i1} où $i \neq 0$ n'étant pas tous nuls [si $\eta = 1$, cela résulte de (**4**)], on peut, en multipliant au besoin à droite par une V ou une U, rendre non nul α_{21} si $n > 3$, ou α_{01} si $n = 3$. Si n est > 3, en multipliant encore à droite par une V_{12}, on rendra α_{11} égal à 1. Si $n = 3$ et $\beta_{11} = 0$ ou α_{11} réel $\neq 0$, on arrive au même résultat en multipliant à droite par une U_{01} ou une $m_{1\lambda}$. Si $n = 3$ avec $\alpha_{11} = r_0 + ur_1$, $\beta_{11} = s_0 + ns_1$ (les r, s étant réels, et $r_1 \neq 0$), on peut réduire s_1 à 0 en multipliant à droite par une v, puis, si β_{11} est alors $\neq 0$, rendre α_{11} réel $\neq 0$ en multipliant à droite par τ_1 : on est ainsi ramené au cas précédent. Soit donc $\alpha_{11} = 1$. En multipliant à droite par des V ou des W, on pourra maintenant annuler les α_{i1}, β_{i1} où $i \neq 1$ (y compris α_{01}). Alors, d'après (4), β_{11} est réel, et l'on peut l'annuler par une v, ce qui entraîne, d'après (6), $\beta'_{11} = 1$. On pourra donc, par les V et les U,

annuler les β'_{i1}, α'_{i1} où $i \neq 1$. Alors, d'après (5), α'_{11} est réel, et l'on pourra l'annuler par une u. Or, d'après (4), (5), (6) où l'on fait un des seconds indices égal à 1, la substitution obtenue est alors dans H_1 (*cf.* 3).

9. Il est utile pour la suite d'indiquer ici les modifications produites par le changement de variables qui consiste à remplacer y_i par $-\frac{1}{2}\omega y_i$ pour $i = 1, \ldots, \nu$, et x par $\varkappa x$ (je supposerai $\varkappa\dot{\varkappa} = c$), en conservant $x_1, \ldots, x_\nu$. Je considérerai ce changement de variables comme une substitution, et je désignerai par les mêmes lettres surmontées d'un trait ce que deviennent les objets précédemment considérés [1]. On a alors

$$\bar{h} = \omega\left(\Sigma_1^\nu \frac{x_i\dot{y}_i + y_i\dot{x}_i}{2} + \eta c x\dot{x}\right).$$

Les équations $(\bar{4})$, $(\bar{5})$, $(\bar{6})$ qui remplacent respectivement (4), (5), (6) s'en déduisent en y remplaçant partout : 1° le signe $-$ par $+$; 2° ω par $2c$. On a

$$\bar{m}_{i\rho} = m_{i\rho}, \qquad \bar{m}_{0\theta} = m_{0\theta}, \qquad \bar{V}_{ik\rho} = V_{ik\rho} \qquad (i, k \neq 0);$$

$$\bar{\tau}_i = \begin{vmatrix} x_i & -\frac{\omega}{2}y_i \\ y_i & \frac{2}{\omega}x_i \end{vmatrix} = t_i m_{i,-\frac{\omega}{2}}, \qquad t_i = \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ y_i & x_i \end{vmatrix};$$

$$\bar{u}_{ik} = \begin{vmatrix} x_i & x_i - \frac{\lambda\omega}{2}y_i \end{vmatrix}, \qquad \bar{v}_{ik} = \begin{vmatrix} y_i & y_i - \frac{2\lambda}{\omega}x_i \end{vmatrix}.$$

Je poserai aussi

$$V'_{ik\rho} = V_{ik\rho} \qquad (i, k \neq 0),$$

$$V_{0k,\frac{\rho}{\varkappa}} = \bar{V}_{0k\rho}\bar{v}_{k,\frac{\rho}{2}} = \begin{vmatrix} x & x + \frac{\rho}{\varkappa}x_k \\ y_k & y_k - 2\varkappa\dot{\rho}x - \rho\dot{\rho}x_k \end{vmatrix},$$

$$U'_{ik\rho} = t_k V'_{ik\rho} t_k = \begin{vmatrix} x_i & x_i + \rho y_k \\ x_k & x_k - \dot{\rho} y_i \end{vmatrix} = m^{-1}_{k,\frac{\omega}{2}} \bar{U}_{ik\rho} m_{k,\frac{\omega}{2}},$$

$$W'_{ik\rho} = t_i V_{ik\rho} t_i = \begin{vmatrix} y_i & y_i + \rho x_k \\ y_k & y_k - \dot{\rho} x_i \end{vmatrix} = m^{-1}_{i,\frac{\omega}{2}} \bar{W}_{ik\rho} m_{i,\frac{\omega}{2}},$$

---

[1] On ne confondra pas les $\bar{m}_i$, $\bar{\tau}_i$, $\bar{u}_i$, ... avec les transposées de m_i, τ_i, u_i, ...

$$R'_{ik\rho} = \overline{R}_{ik\rho} - R_{ik\rho}, \qquad S'_{ik\rho} = t_k R_{ik\rho} t_k = \begin{vmatrix} x_i & \rho & y_k \\ y_i & \rho^{-1} & x_k \\ x_k & -\rho & y_i \\ y_k & -\rho^{-1} & x_i \end{vmatrix} = m^{-1}_{k,\frac{\omega}{2}} \overline{S}_{ik\rho} m_{k,\frac{\omega}{2}}.$$

10. Désignons par $H^0_{ik}(n, \pi) = H^0_{ik} = H^0_{ki}$ ce que devient $H^0(4, \pi)$ quand on y remplace x_1, y_1, x_2, y_2 par x_i, y_i, x_k, y_k respectivement, et par $H^0_{0i}(n, \pi) = H^0_{i0} = H^0_{0i}$ ce que devient $H^0(3, \pi)$ quand on remplace x_1, y_1 par x_i, y_i. D'après le n° **6**, $H^0(n, \pi)$ est le p. p. c. m. des H^0_{ij} où $i, j = 1, \ldots, \nu$ si $n = 2\nu$ et $i, j = 0, \ldots, \nu$ si $n = 2\nu + 1$. On peut simplifier ce résultat en remarquant que $\{H^0_{il}, H^0_{kl}\}$ contient toujours H^0_{ik} (i, k, l distincts $\geqq 0$). En effet $\{H^0_{ik}, H^0_{kl}\}$ contient τ_i, τ_k, les n_i et les u_k, et, d'après (15), (18) et (17), on sait exprimer $V_{ik,-\rho\sigma}$ ($i \geqq 0$) par des éléments de H^0_{il}, H^0_{kl} et $V_{kl,\omega\rho\sigma}$ par des éléments de H^0_{i0}, H^0_{k0}. Donc

$$\begin{aligned} H^0(2\nu, \pi) &= \{H^0_{12}, H^0_{23}, \ldots, H^0_{\nu-1,\nu}\} = \{H^0_{12}, H^0_{13}, \ldots, H^0_{1\nu}\}, \\ H^0(2\nu+1, \pi) &= \{H^0_{01}, H^0_{12}, \ldots, H^0_{\nu-1,\nu}\} = \{H^0_{01}, H^0_{02}, \ldots, H^0_{0\nu}\} \\ &= \{H^0_{01}, H^0(2\nu, \pi)\}. \end{aligned}$$

11. Les cas $n = 3, 4$ s'imposent donc à l'attention.

Soit d'abord $n = 4$ [1], et v le p. p. c. m. des V_{12}, V_{21}, $w = \tau_1^{-1} v \tau_1$ celui des U_{12}, W_{12}. D'après le n° **6** $H^0 = \{v, w\}$. Désignons, en général, par $L_{xy} = \Sigma s_{xy}$, U_{xy} les groupes semblables à $L(2, \pi^2)$. $U(2, \pi^2)$ opérant sur les variables x, y (*S.*, 74), et considérons les substitutions $s_{x_1x_2}\bar{s}^{-1}_{y_1y_2}$. v est formé des s où $s_{x_1x_2}$ parcourt $U_{x_1x_2}$ (*S.*, 83). *Donc* v *est isomorphe à* $U_{x_1x_2}$, $V_{ik\rho}$ *de* v *correspondant à* $|x_i, x_i + \rho x_k|$ *de* $U_{x_1x_2}$. D'ailleurs $m_{1\rho}$ est permutable à v et transforme les substitutions de v comme $|x_1, \rho x_1|$ transforme les substitutions correspondantes de $U_{x_1x_2}$. *Donc* $\{v, m_{1\nu}\} = V$ *est isomorphe à* $L_{x_1x_2}$ *et formé de toutes les* s *de* H. Le p. g. c. d. de V, H^0, formé des $vm^k_{1\nu}$ de déterminant 1, est $\{v, m_{1\nu}\} = V^0$, isomorphe au diviseur de $L_{x_1x_2}$ formé des substitutions de déterminant réel.

Comme $U(2, \pi^2)$ est, dans $L(2, \pi^2)$, le seul diviseur normal de son

---

[1] *Cf.* Dickson, *Linear groups*, 134-136.

ordre contenant le central de $L(2, \pi^2)$ (*S.*, 83), le normalisant $\overline{V}$ de V dans H et celui $\overline{V}^0$ de V^0 dans H^0 divisent respectivement les normalisants $\overline{v}$ et $\overline{v}^0$ de v dans H et H^0.

Déterminons d'abord $\overline{v}^0$. On a (avec les notations du n° 5)

$$V_{12\rho}\alpha = \begin{vmatrix} x_1 & X_1 - \dot{\rho}\alpha'_{12}y_1 + \rho\alpha_{11}x_2 \\ y_1 & Y_1 - \dot{\rho}\beta'_{12}y_1 + \rho\beta_{11}x_2 \\ x_2 & X_2 - \dot{\rho}\alpha'_{22}y_1 + \rho\alpha_{21}x_2 \\ y_2 & Y_2 - \dot{\rho}\beta'_{22}y_1 + \rho\beta_{21}x_2 \end{vmatrix},$$

et $\alpha^{-1}V_{12\rho}\alpha$ se réduit de $V_{12\rho}\alpha$ en remplaçant, dans les fonctions substituées aux variables, X_i, Y_i par x_i, y_i, et x_i, y_i par X'_i, Y'_i. Identifions maintenant $\alpha^{-1}V_{12\rho}\alpha$ avec une s de v. J'appellerai dans ce qui suit *coefficients significatifs* les 8 coefficients qui jouent le rôle des α_{ik}, β'_{ik} dans une substitution quelconque de H. Les coefficients non significatifs d'une s étant toujours nuls, les 8 équations d'identification relatives à ces derniers sont linéaires homogènes en ρ et $\dot{\rho}$. Comme ρ est arbitraire, ces 8 équations en fournissent 16 qui se réduisent à

$$(22) \qquad \begin{cases} \alpha_{11}\alpha'_{12} = \alpha_{11}\alpha'_{22} = \alpha_{21}\alpha'_{12} = \alpha_{21}\alpha'_{22} = 0, \\ \beta_{11}\beta'_{12} = \beta_{11}\beta'_{22} = \beta_{21}\beta'_{12} = \beta_{21}\beta'_{22} = 0. \end{cases}$$

Les 8 équations relatives aux coefficients significatifs donnent, en éliminant ces coefficients (conjugués deux à deux au signe près lorsqu'il s'agit d'une s de v), 4 équations linéaires homogènes en ρ et $\dot{\rho}$, d'où, comme tout à l'heure, 8 équations qui se réduisent à

$$(23) \qquad \alpha_{11}\dot{\beta}'_{12} + \alpha_{21}\dot{\beta}'_{22} = 0, \qquad \alpha'_{12}\dot{\beta}_{11} + \alpha'_{22}\dot{\beta}_{21} = 0.$$

En remplaçant $V_{12\rho}$ par $V_{21\rho}$, on obtient, au lieu de (22), (23), les équations suivantes, qui s'en déduisent par permutation des indices 1 et 2,

$$(24) \qquad \begin{cases} \alpha_{22}\alpha'_{21} = \alpha_{22}\alpha'_{11} = \alpha_{12}\alpha'_{21} = \alpha_{12}\alpha'_{11} = 0, \\ \beta_{22}\beta'_{21} = \beta_{22}\beta'_{11} = \beta_{12}\beta'_{21} = \beta_{12}\beta'_{11} = 0. \end{cases}$$

$$(25) \qquad \alpha_{22}\dot{\beta}'_{21} + \alpha_{12}\dot{\beta}'_{11} = 0, \qquad \alpha'_{21}\dot{\beta}_{22} + \alpha_{11}\dot{\beta}_{12} = 0.$$

Je dis que, si un seul des coefficients significatifs de α est $\neq 0$, α est dans V^0. En effet, *soit d'abord* $\alpha_{11} \neq 0$. Alors, d'après (22), $\alpha'_{12} = \alpha'_{22} = 0$. De plus $\beta_{11} = \beta_{21} = 0$, sans quoi, d'après (22), β'_{12} et β'_{22} seraient nuls et la quatrième colonne de α serait nulle. Donc $\beta_{12} = \beta_{22} = 0$, sans quoi, d'après (24), β'_{21} et β'_{11} seraient nuls, et la forme h des deux premières colonnes de α (1) serait nulle. Enfin $\alpha'_{11} = \alpha'_{21} = 0$, sans quoi, d'après (24), α_{12} et α_{22} seraient nuls, et la forme h des deux dernières colonnes serait nulle. De plus, les relations (6) [dont (23) et (25) font partie] donnent, en posant

$$\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21} = \delta, \qquad \beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}\beta_{21} = \delta',$$

$$\alpha_{11}\dot{\delta}' = \dot{\beta}'_{22}, \qquad \alpha_{12}\dot{\delta}' = -\dot{\beta}'_{21}, \qquad \alpha_{21}\dot{\delta}' = -\dot{\beta}'_{12}, \qquad \alpha_{22}\dot{\delta}' = \dot{\beta}'_{11}.$$

d'où $\dot{\delta}\dot{\delta}' = 1$. Or $\dot{\delta}\dot{\delta}'$, déterminant de α, est égal à 1. Donc $\dot{\delta}$ et $\dot{\delta}'$ sont réels, et les relations précédentes montrent que α est une s de H^0 donc de V^0.

Si α_{12} *est* $\neq 0$, on voit de même que $R_{121}\alpha$ (R_{121} fait partie de v) est dans V^0, donc α dans $R_{121}^{-1}V^0 = V^0$.

Si β'_{11} *ou* β'_{12} *est* $\neq 0$, on voit de même que $(\tau_1\tau_2)^{-1}\alpha\tau_1\tau_2$ ($\tau_1\tau_2$, qui transforme $V_{12\rho}$ en $V_{21\rho}^{-1}$ et $V_{21\rho}$ en $V_{12\rho}^{-1}$ est permutable à v) est dans V^0, donc α dans $\tau_1\tau_2 V^0(\tau_1\tau_2)^{-1} = V^0$ ($\tau_1\tau_2$ est permutable à $\{m_{1v}\}$ donc à $\{m_{1v}\}$).

Si donc α_{22}, α_{21}, β'_{22} *ou* β'_{21} *est* $\neq 0$, α est aussi dans V^0, puisque les équations (22)-(25) ne changent pas quand on y échange les indices 1 et 2.

Supposons donc nuls tous les coefficients significatifs de α. Alors $\tau_1\tau_2\alpha$, dont les coefficients significatifs ne sont pas tous nuls, est dans V^0, donc α dans $(\tau_1\tau_2)^{-1}V_0$. Donc $\bar{v}^0 = \{V^0, \tau_1\tau_2\}$, et, $\tau_1\tau_2$ étant permutable à $\{m_{1v}\}$, $\bar{v}^0 = \bar{V}^0$.

Comme m_{1v} est permutable à v, à V^0 et à V, et que $H = \{H^0, m_{1v}\}$, il est clair que $\bar{v} = \{V, \tau_1\tau_2\} = \bar{V}$. Donc $(H, \bar{V}) = (H^0, V^0)$, et v ou V^0 a les mêmes conjugués dans H et H^0.

Toute similitude σ de V étant dans un complexe vm_{1v}^k, σm_{1v}^k est dans v et est par suite une substitution s où $s_{r_1r_2}$ est dans $U_{x_1x_2}$, d'où $\rho^2 = 1$, $t'^k = 1$. Donc σ est dans v et dans D, et, comme v contient $d = R_{121}^2$, le p. g. c. d. de v, J est D. D'ailleurs $(\tau_1\tau_2)^2 = d$. Donc,

en remplaçant partout les lettres v, V par $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{V}$ pour indiquer qu'on regarde les variables comme homogènes, les normalisants respectifs de $\mathfrak{v}$ ou $\mathfrak{V}^0$ dans $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}_0$ sont $\overline{\mathfrak{V}}$ et $\overline{\mathfrak{V}}^0$, et $(\mathcal{H}, \overline{\mathfrak{V}}) = (\mathcal{H}^0, \overline{\mathfrak{V}}^0) = (\mathrm{H}, \overline{\mathrm{V}})$.

12. Soit $n = 3$ et v le p. p. c. m. des V_{01}, $u = \tau_1^{-1} v \tau_1$ celui des U_{01}. v est un g_{π^3} sylowien de H^0 dont le central est le g_π p. p. c. m. des u_i (**7**). Cherchons ici le normalisant $\overline{u}$ de u dans H. u est permutable à $m_{0,v^{\pi-1}}$ (on verra dans un Mémoire ultérieur, que $\{u, m_{0,v^{\pi-1}}\}$ est le diviseur fixant le point 100 dans H) et à m_{1v}. Donc $\overline{u}$ contient $\{u, m_{0,v^{\pi-1}}, m_{1v}\}$.

Pour que $\alpha^{-1}\mathrm{U}_{01\rho}\alpha$ soit de la forme $\mathrm{U}_{01\sigma}u_{i\lambda}$, on trouve, comme pour $n = 4$ (l'élimination des coefficients non nuls de $\mathrm{U}_{01\sigma}u_{i\lambda}$ est ici inutile), $\alpha_{01} = \beta_{11} = \alpha_{11}\beta_{10} = 0$, et comme (6) donne $\alpha_{11}\dot{\beta}_{11} = 1$, il faut que $\beta_{10} = 0$. Les autres conditions (4)-(6) deviennent alors

$$\alpha'_{11}\dot{\beta}'_{11} - \beta'_{11}\dot{\alpha}'_{11} + \omega\alpha'_{01}\dot{\alpha}'_{01} = 0, \qquad \alpha_{00}\dot{\alpha}_{00} = 1, \qquad \alpha_{10}\dot{\beta}'_{11} + \omega\alpha_{00}\dot{\alpha}'_{01} = 0.$$

Comme $\alpha_{00}\dot{\alpha}_{00} = \alpha_{11}\dot{\beta}'_{11} = 1$, on peut, en multipliant α par des puissances de $m_{0v^{\pi-1}}$ et de m_{1v}, réduire α_{11}, β'_{11} et α_{00} à 1. Les conditions précédentes expriment alors que α est dans u. Donc $\overline{u} = \{u, m_{0v^{\pi-1}}, m_{1v}\}$, et $(\mathrm{H}, \overline{u}) = \pi^3 + 1$. Le p. g. c. d. de $\overline{u}$, H^0 est évidemment $\{u, m_{0,v^{\pi-1}}, m_{1v}\} = \overline{u}^0$, et $(\mathrm{H}^0, \overline{u}^0) = \pi^3 + 1$ (d'ailleurs, v étant un g_{π^3} sylowien, on savait *a priori* qu'il avait les mêmes conjugués dans H et H_0).

Remplaçons les lettres v, u par $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{u}$ pour indiquer qu'on regarde les variables comme homogènes. Le $g_{\pi^3}\mathfrak{u}$, toujours ici premier au $g_{\pi+1}\mathrm{J}$, est isomorphe à u. Mais $\overline{u}$ contient J (*a priori*), et $\overline{u}^0$ contient J^0. Donc $(\mathcal{H}, \overline{\mathfrak{u}}) = (\mathcal{H}^0, \overline{u}^0) = \pi^3 + 1 = (\mathrm{H}, \overline{\mathrm{V}})$.

13. *Supposons* $n \geqq 4$, et soit Γ un diviseur normal de H non contenu dans J. Si α est dans Γ, Γ contient aussi (les notations étant celles du n° **5**)

$$u_{i\lambda}^{-1}\alpha\, u_{i\lambda} = \begin{vmatrix} x_i & X_i + \lambda Y_i - \lambda\alpha_{ii}y_i - \lambda^2\beta_{ii}y_i \\ y_i & Y_i - \lambda\beta_{ii}y_i \\ x_j & X_j - \lambda\alpha_{ji}y_i \qquad (j \neq i) \\ y_j & Y_j - \lambda\beta_{ji}y_i \end{vmatrix},$$

$$
\begin{array}{c}
V_{ik\rho}^{-1}\alpha\, V_{ik\rho}= \\
(i,\, k \neq 0)
\end{array}
\left|
\begin{array}{ll}
x_i & X_i+\rho X_k-\rho\alpha_{ii}x_k+\dot{\rho}\alpha'_{ik}y_i-\rho^2\alpha_{ki}x_k+\rho\dot{\rho}\alpha'_{kk}y_i \\
y_i & Y_i-\rho\beta_{ii}x_k+\dot{\rho}\beta'_{ik}y_i \\
x_k & X_k-\rho\alpha_{ki}x_k+\dot{\rho}\alpha'_{kk}y_i \\
y_k & Y_k-\dot{\rho}Y_i-\rho\beta_{ki}x_k+\dot{\rho}\beta'_{kk}y_i+\rho\dot{\rho}\beta'_{ii}x_k-\dot{\rho}^2\beta'_{ik}y_i \\
x_j & X_j-\rho\alpha_{ji}x_k+\dot{\rho}\alpha'_{jk}y_i \qquad (j\neq i,\, k) \\
y_j & Y_j-\rho\beta_{ji}x_k+\dot{\rho}\beta'_{jk}y_i
\end{array}
\right|,
$$

$$
\begin{array}{c}
U_{ik\rho}^{-1}\alpha\, U_{ik\rho}= \\
(i,\, k \neq 0)
\end{array}
\left|
\begin{array}{ll}
x_i & X_i+\rho Y_k-\rho\alpha_{ii}y_k-\dot{\rho}\alpha_{ik}y_i-\rho^2\beta_{ki}y_k-\rho\dot{\rho}\beta_{kk}y_i \\
y_i & Y_i-\rho\beta_{ii}y_k-\dot{\rho}\beta_{ik}y_i \\
x_k & X_k+\dot{\rho}Y_i-\rho\alpha_{ki}y_k-\dot{\rho}\alpha_{kk}y_i-\rho\dot{\rho}\beta_{ii}y_k-\dot{\rho}^2\beta_{ik}y_i \\
y_k & Y_k-\rho\beta_{ki}y_k-\dot{\rho}\beta_{kk}y_i \\
x_j & X_j-\rho\alpha_{ji}y_k-\dot{\rho}\alpha_{jk}y_i \qquad (j\neq i,\, k) \\
y_j & Y_j-\rho\beta_{ji}y_k-\dot{\rho}\beta_{jk}y_i
\end{array}
\right|,
$$

$$
\begin{array}{c}
W_{ik\rho}^{-1}\alpha\, W_{ik\rho}= \\
(i,\, k \neq 0)
\end{array}
\left|
\begin{array}{ll}
x_i & X_i+\rho\alpha'_{ii}x_k+\dot{\rho}\alpha'_{ik}x_i \\
y_i & Y_i+\rho X_k+\rho\beta'_{ii}x_k+\dot{\rho}\beta'_{ki}x_i+\rho^2\alpha'_{ki}x_k+\rho\dot{\rho}\alpha'_{kk}x_i \\
x_k & X_k+\rho\alpha'_{ki}x_k+\dot{\rho}\alpha'_{kk}x_i \\
y_k & Y_k+\dot{\rho}X_i+\rho\beta'_{ki}x_k+\dot{\rho}\beta_{kk}x_i+\rho\dot{\rho}\alpha'_{ii}x_k+\dot{\rho}^2\alpha'_{ik}x_i \\
x_j & X_j+\rho\alpha'_{ji}x_k+\dot{\rho}\alpha'_{jk}x_i \qquad (j\neq i,\, k) \\
y_j & Y_j+\rho\beta'_{ji}x_k+\dot{\rho}\beta'_{jk}x_i
\end{array}
\right|,
$$

ainsi que les substitutions $\alpha^{-1}u_{ik}^{-1}\alpha u_{ik}$, $\alpha^{-1}V_{ik\rho}^{-1}\alpha V_{ik\rho}$, $\alpha^{-1}U_{ik\rho}^{-1}\alpha U_{ik\rho}$, $\alpha^{-1}W_{ik\rho}^{-1}\alpha W_{ik\rho}$, qui se déduisent dss précédentes en y remplaçant, dans les fonctions substituées aux variables, X_i, Y_i par x_i, y_i et x_i, y_i par X'_i, Y'_i (3).

Tout d'abord Γ contient des α qui ne sont pas des multiplications, car les conditions que α, $u_{ik}^{-1}\alpha u_{ik}$, $V_{ik\rho}^{-1}\alpha V_{ik\rho}$ $(i \geqq 0)$ soient des multiplications donnent respectivement $\alpha_{ii}\beta'_{ii}=1$, $\alpha_{ii}=\beta'_{ii}$, $\alpha_{kk}=\alpha_{ii}$, $\alpha_{00}=\alpha_{ii}$ (si $\eta=1$), donc $\alpha=1$ ou d.

Soit donc α une substitution de Γ autre qu'une multiplication. Si $\eta=1$ et si tous les coefficients non diagonaux autres que les α_{i0}, β_{i0} sont nuls, les équations (4) et (6) (pour $j=0$, $k=1, \ldots, \nu$) montrent que ces derniers sont aussi nuls. Donc un des autres coefficients non diagonaux est $\neq 0$. Donc, en transformant au besoin α par une $T_{1k}^{r}\tau_1^{s}$

$(r, s = 0, 1)$, *on peut supposer qu'un des* α_{j1}, β_{j1} *autres que* α_{11} *est* $\neq 0$.

Je dis maintenant que Γ *contient, hors de* J, *une* α *où les* α_{j1}, β_{j1} *autres que* α_{11}, β_{11} *sont tous nuls*, β_{11} *étant* $\neq 0$. Prenons en effet dans Γ, hors de J, une α où ces α_{j1}, β_{j1} $(j \neq 1)$ ne soient pas tous nuls. Si α_{01} est le seul d'entre eux $\neq 0$, α_{11} et β_{11} sont, d'après (4), tous deux $\neq 0$; une transformée (¹) de α par $U_{01\rho}$ [où β_{11}, α_{j1}, β_{j1} $(i > 1)$ sont conservés tandis que α_{01} est remplacé par $\alpha_{01} + \rho\beta_{11}$] aura donc la forme voulue (elle ne sera pas dans J puisque $\beta_{11} \neq 0$). Si un des α_{j1}, β_{j1} où $j \neq 0$ est $\neq 0$, on peut, en transformant au besoin par une τ_j, supposer que c'est un β_{j1}. Soit donc (en transformant au besoin par une T_{2j}) $\beta_{21} \neq 0$. Si maintenant $\beta_{11} = 0$, on le rendra $\neq 0$ en transformant par une $V_{21\rho}$ telle que $\rho\dot{\rho}\beta_{22}$ soit $\neq \rho\beta_{12} + \dot{\rho}\beta_{21}$, ou bien par les trois opérations suivantes : 1° une transformation par $U_{12\rho}$ qui rendra α_{11} arbitraire; 2° le remplacement de α par $\alpha^{-1} u_{1\lambda}^{-1} \alpha u_{1\lambda}$ qui substitue $\lambda(1 - \alpha_{11}\dot{\alpha}_{11})$ à α'_{11}; 3° une transformation par τ_1. En transformant alors par des V_{1j}, U_{1j} où $j \neq 1$, on annulera les β_{j1}, α_{j1} où $j \neq 1$ sans altérer β_{11}.

Dès lors Y'_1 se réduit à $-\beta_{11}x_1 + \dot{\alpha}_{11}y_1$ et $\alpha^{-1} u_{1\lambda}^{-1} \alpha u_{1\lambda}$ à

$$\beta = \begin{vmatrix} x_1 & (1 + \lambda\alpha_{11}\dot{\beta}_{11} + \lambda^2\beta_{11}\dot{\beta}_{11})x_1 + \lambda(1 - \alpha_{11}\dot{\alpha}_{11} - \lambda\dot{\alpha}_{11}\beta_{11})y_1 \\ y_1 & \lambda\beta_{11}\dot{\beta}_{11}x_1 + \lambda(1 - \lambda\dot{\alpha}_{11}\beta_{11})y_1 \end{vmatrix},$$

les variables non écrites étant inaltérées, et $\beta_{11} \neq 0$. D'après (4), $\alpha_{11}\dot{\beta}_{11} = \beta_{11}\dot{\alpha}_{11}$, en sorte que *les coefficients de* β *sont réels* comme il le faut (5). Donc, en prenant au besoin β pour α, *on peut supposer* α_{11} *et* β_{11} *réels* $\neq 0$.

Soit alors $U^1 = U(2, \pi)$ (5) le groupe des substitutions de $H^0(n, \pi)$ qui laissent inaltérées les variables autres que x_i, y_i $(i \neq 0)$, $D^1 = \{m_{i,-1}\}$ son g_2 normal et J' le p. g. c. d. de Γ, J. Comme β est dans U^1, hors de D^1J' (en supposant $\lambda \neq 0$), le p. g. c. d. de Γ, U^1J', normal dans U^1J', est $> D^1J'$. Donc le p. g. c. d. de $\Gamma|J'$, $U^1J'|J'$, normal

(¹) Cette transformation de α et celles qui vont suivre produisent sur les α_{j1}, β_{j1} où $j \neq 1$ les mêmes changements que la simple multiplication à droite de α par la transformante.

dans $U^1J'|J'$, est $> D^1J'|J'$. Or, si π est > 3, $U^1J'|J'$ est simple. *Donc, si* $\pi > 3$, Γ *contient* U^1 *et de même* $U^2, \ldots, U^\nu$.

Soit d'abord $\pi > 3$. Γ, contenant les m_i et les v_i (qui sont dans les U^i), contient $m_{i\lambda}^{-1} V_{ik\rho} m_{ik} V_{ik\rho}^{-1} = V_{ik,\rho\lambda-1}$ [*cf.* (19)] et

$$m_{1\lambda} V_{01\rho} m_{1\lambda}^{-1} V_{01\rho}^{-1} = V_{01,\rho\lambda} V_{01\rho}^{-1} = V_{01,\rho(\lambda-1)} c_{1,b(1-\lambda)\rho\rho} \qquad [cf.\ (19), (11), (14)],$$

et par suite tous les $V_{j\lambda}$ ($j \geqq 0$). Étant normal, il contient encore les u_i. Il contient donc tous les générateurs de H^0 (**6, 8**). *Donc, pour* $\pi > 3$, *tout diviseur normal de* H *non contenu dans* J *est* $\geqq H^0$. On voit de même, en remplaçant dans ce qui précède H par H^0 et J par J^0, que, *pour* $\pi > 3$, *tout diviseur normal de* H^0 *non contenu dans* J^0 *coïncide avec* H^0.

Soit $\pi \leqq 3$. On sait seulement alors que Γ, diviseur normal de H non $\leqq$ J (ou diviseur normal de H^0 non $\leqq J^0$), contient β où l'on peut supposer α_{11} et β_{11} réels $\neq 0$. Donc α_{11}, β_{11} et λ (supposé aussi $\neq 0$) sont égaux à ± 1, et, en posant $\alpha_{11}\beta_{11} = \delta$,

$$\beta = \begin{vmatrix} x_1 & (\lambda\delta - 1)x_1 - \delta y_1 \\ y_1 & \lambda x_1 + (1 - \lambda\delta) y_1 \end{vmatrix} \qquad (\lambda = \pm 1,\ \delta = \pm 1).$$

Soit $\pi = 3$. En prenant $\lambda = \delta$ et $\lambda = -\delta$ on a deux substitutions qui engendrent le $g_8 Q^1$ normal dans U^1 (*S.*, 83). Donc Γ contient Q_1 et de même le $g_8 Q^i$ normal dans U^i. Donc Γ contient les τ_i, les m_i, et par suite, comme pour $\pi > 3$ (en supposant, ce qui est permis, $b = 0$), tous les V_{jk} ($j \geqq 0$). Étant normal, il contient encore les U_{jk}, W_{jk} et, d'après (12), les u_i, v_i. Il contient donc tous les générateurs de H_0 (**6, 8**).

Soit $\pi = 2$. Alors $\beta = \begin{vmatrix} x_1 & x_1 + y_1 \\ y_1 & x_1 \end{vmatrix} = \tau_1 u_{11}$, et Γ contient $\tau_i u_{i1} = v_{i1}\tau_i$, donc, si $n \geqq 4$,

$$(\tau_i u_{i1})^{-1} V_{ik\rho}^{-1} \tau_i u_{i1} V_{ik\rho} = W_{ik\rho} v_{ki} = v_{ki} W_{ik\rho},$$

donc

$$W_{ik\rho} v_{k1} v_{k1} W_{ik\sigma} = W_{ik,\rho+\sigma} \qquad (i,\ k \neq 0),$$

dans toutes les W_{ik}, V_{ik}, U_{ik}, donc aussi les $V_{0k\rho} V_{k\sigma} V_{0k\rho}^{-1}$, donc, d'après (18), les V_{0i} et aussi, d'après (13), les u_i, v_i, donc les τ_i. Donc, pour $n \geqq 4$, $\Gamma = H^0$.

Ainsi, en exceptant le cas où $\pi = 2$ *avec* $n \geqq 3$, *tout diviseur normal de* $H(n, \pi)$ *ou de* $H^0(n, \pi)$ *non contenu dans* J *est* $\geqq H^0$. *Alors* $\mathfrak{H}^0(n, \pi) \equiv H^0 | J^0$ *est simple, et* J *est le central de* H, J^0 *celui de* H^0. $H^0(2, 2) \equiv U(2, 2)$ *est isomorphe au* g_6 *symétrique* (*S.*, 83), et l'on va voir que le g_{216} $H^0(3, 2)$ *est résoluble* (¹).

On vérifie d'ailleurs directement, en développant les conditions $\alpha V_{ik\lambda} = V_{ik\lambda}\alpha$, $\alpha U_{ik\lambda} = U_{ik\lambda}\alpha$ $(i, k \geqq 0)$, ou en se servant (pour i, $k \neq 0$) des expressions données de $V_{ik\lambda}^{-1}\alpha V_{ik\lambda}$, $U_{ik\lambda}^{-1}\alpha U_{ik\lambda}$, que *toute substitution* α *permutable à chaque substitution de* H *est une similitude. Donc le central de* H′ *est* Γ.

14. *Soit donc* $\pi = 2$, $n = 3$. Alors $\upsilon^2 + \upsilon + 1 = 0$, $\omega = 1$. Γ contient

$$\beta^{-1} V_{01\rho}^{-1} \beta V_{01\rho} = \begin{vmatrix} x_1 & x_1 + \dot{\upsilon} y_1 + \dot{\rho} x \\ y_1 & \upsilon x_1 + y_1 + \dot{\upsilon}\dot{\rho} x \\ x & \rho x_1 + \upsilon\rho y_1 \end{vmatrix}.$$

Prenons les variables $y = \upsilon x_1 + y_1$, $z = x_1 + \upsilon y_1$ $(x_1 = y + \upsilon z$, $y_1 = \dot{\upsilon} y + z)$ qui ramènent h à la forme $\varepsilon = x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}$ (*cf.* **2**), et convenons de désigner par les mêmes lettres les substitutions de H^0 et leurs expressions respectives par les variables de E^0. On a alors (l'ordre des variables étant x, y, z) :

$$\beta = |x, \upsilon y, \dot{\upsilon} z|. \qquad \beta^{-1} V_{01\rho}^{-1} \beta V_{01\rho} = |\rho z, \dot{\rho} x, y|,$$
$$(\beta^{-1} V_{011}^{-1} \beta V_{011})^2 = \theta = |y, z, x|.$$

Γ, contenant θ et $\beta = \beta_1$ $(\theta^3 = \beta^3 = 1)$, contient aussi $\theta\beta\theta^{-1} = |\dot{\upsilon} x, y, \upsilon z| = \beta_2$, $\theta^{-1}\beta\theta = |\upsilon x, \dot{\upsilon} y, z| = \beta_3$ et $\beta_1\beta_2^2 = |\upsilon x, \upsilon y, \upsilon z| = \delta$ qui engendre J^0. Il est clair que $\{\delta, \beta\}$ est un g_9 abélien principal, normal dans le g_{27} $\{\delta, \beta, \theta\} = \{\beta, \theta\} = P$ défini par les équations de $\{\delta, \beta\}$ jointes à $\theta^3 = 1$, $\theta^{-1}\beta\theta = \beta\delta$, $\theta\delta = \delta\theta$. Je dis que P est normal dans A^0. Comme $u_{11} = \tau_1\beta$, il suffit de montrer que P est permutable à τ_1 et à $V_{01\rho}$. Or, en posant $\tau_1 = \zeta_1 = \zeta = |x, z, y|$, $\theta\zeta\theta^{-1} = \zeta_2 = |z, y, x|$,

(¹) D'ailleurs $216 = 2^3.3^3$, et tout groupe dont l'ordre n'a que deux facteurs premiers distincts est résoluble, d'après un théorème dû à M. Burnside [*P. L. M. S.*, 2ᵉ série, t. I, 1904, p. 389].

$\theta^{-1}\zeta\theta = \zeta_3 = |y, x, z|$ $(\zeta_1\zeta_2 = \zeta_3\zeta_1 = 0)$ et

$$V_{01\rho} = V_\rho = |x + \rho y + \upsilon\rho z,\ \rho x + \upsilon y + z,\ \upsilon\rho x + \upsilon y + \upsilon z|.$$

on a

$$\zeta_i\theta\zeta_i = \theta^2, \qquad \zeta_i\beta_i\zeta_i = \beta_i^2, \qquad \zeta_i\beta_k\zeta_i = \beta_l^2 \qquad (i, k, l \text{ distincts}),$$

$$V_1^{-1}\beta V_1 = \theta^2\beta\delta^2, \qquad V_1^{-1}\theta V_1 = \theta^2\beta^2\delta, \qquad V_\upsilon^{-1}\beta V_\upsilon = \theta^2\beta^2, \qquad V_\upsilon^{-1}\theta V_\upsilon = \theta\beta^2\delta,$$

$$V_{\upsilon^2} = V_{1+\upsilon} = V_1 V_\upsilon e_{11} = V_1 V_\upsilon^3 = V_1 V_\upsilon^{-1} = V_\upsilon V_1.$$

Ainsi P *est normal dans* A^0. *De plus* $\{V_1, V_\upsilon\} = Q$ *est un* g_8 *des quaternions défini par* $V_1^4 = V_\upsilon^4 = 1$, $V_\upsilon^2 = V_1^2$ $(= \beta\zeta = e_{11})$, $V_\upsilon^{-1} V_1 V_\upsilon = V_1^3$, et $A^0 = PQ$. *Les équations de* A^0 *résultent évidemment de ce qui précède.*

Tout diviseur normal X *de* A^0 *non contenu dans* J^0 *contient le* g_{27} *sylowien normal* P. En effet, l'ordre du p. g. c. d. de Γ, P est > 1, car les équations précédentes montrent qu'aucun diviseur de Q n'est normal dans A^0. Donc Γ contient J^0 (*E.*, 152). Or on vérifie de suite sur les équations précédentes que tout diviseur normal > 1 de $A^0 | J^0$ contient $P | J^0$ (¹).

On remarquera que le g_{54} $\{P, \zeta\}$ contient $u_{11} = \zeta\beta = |x, \upsilon z, \upsilon y|$, $e_{11} = \beta\zeta = |x, \upsilon z, \upsilon y|$ et $V_\rho^2 = e_{11}$ [*cf.* (**11**)].

Désignons par xyz le point de coordonnées *homogènes* x, y, z, et écrivons respectivement $a, b, c, d, e, f, g, h, i, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v$ pour 001, $\upsilon^2$01, 101, $\upsilon^2\upsilon^2$1, 1υ1, υ01, 0$\upsilon^2$1, $\upsilon\upsilon$1, $\upsilon\upsilon^2$1, 0υ1, υ11, 1$\upsilon^2$1, $\upsilon^2\upsilon$1, 111, $\upsilon^2$11, 011, $\upsilon^2$10, υ10, 110, 010, 100 (ce sont les symboles de $\mathfrak{A}^0$). On a alors, en désignant encore, d'une manière générale, par la même lettre une substitution de A^0 et son action sur les symboles $a, b, \ldots, v$:

$$\zeta = br.ct.fs.gk.q.au.de.hm.in.l.o.p.v,$$
$$\zeta_3 = bg.cq.fk.rs.t.el.in.pm.uv.a.d.h.o,$$
$$\beta = bcf.gkq.rst.del.hpm.ino.a.u.v,$$
$$\theta = bks.cqt.grf.auv.del.hmp.i.n.o = \zeta_3\zeta,$$
$$V_1 = bqtk.cfsr.g.aeul.hnpo.dv.im,$$
$$V_\upsilon = brtf.cqsk.g.ahup.eoln.di.mv \quad (^2).$$

(¹) On peut se servir aussi de la représentation de $A^0 | J^0$ en g^9 qui a déjà été rencontrée (*S.*, 73, p. 101; $A^0 | J_0$ est isomorphe au g_{72}, non métacyclique ayant un g_9 non cyclique normal) et qu'on va retrouver dans un instant.

(²) *Cf. S.*, 79 et 109 où les notations $\upsilon, \zeta, \zeta_3, \beta$ sont remplacées respectivement par i, ζ, ρ, a_0.

Ce sont les générateurs du g_{72} $\mathfrak{A}^0 \equiv A^0 | J^0$. D'après ce qui précède, *tout diviseur normal de* $\mathfrak{A}^0$ *contient le* $g_9 \{\beta, \theta\}$.

$\mathfrak{A}^0$ a deux systèmes d'intransitivité, l'un $\mathfrak{q}_0$ de degré 9 formé de b, c, f, g, k, q, r, s, t. l'autre $\mathfrak{q}_1$ de degré 12 formé de a, d, e, h, i, l, m, n, o, p, u, v. Le diviseur $\mathfrak{X}^0$ fixant g est le $g_8 \{V_1, V_2\}$. Le diviseur $\mathfrak{X}_1^0$ fixant v est le $g_6 \{\beta, \zeta\}$. On réduit $\mathfrak{A}$ de $\mathfrak{A}^0$ en adjoignant à $\mathfrak{A}^0$ la substitution

$$s_2 = |x, y, vz| = bfc.gkq.r.s.t.dho.epi.lmn.a.u.v.$$

$\mathfrak{A}$ a les mêmes systèmes d'intransitivité que $\mathfrak{A}^0$. Mais les diviseurs $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{X}_1$ de $\mathfrak{A}$ qui fixent respectivement g et v n'ont pas les mêmes systèmes d'intransitivité que $\mathfrak{X}^0$ et $\mathfrak{X}_1^0$. Le constituant de $\mathfrak{A}$ (ou *a fortiori* de $\mathfrak{A}^0$) qui a pour champ $\mathfrak{q}_1$ a les quatre systèmes d'imprimitivité *auv*, *del*, *hmp*, *ino*. Le constituant de $\mathfrak{A}^0$ dont le champ est $\mathfrak{q}_0$ est évidemment primitif [1].

15. Soit $P_{A(n,\pi)} = P = P_0$ le p. p. c. m. des V_{1k}, U_{1k} $(k = 2, \ldots, \nu)$, U_{10}, u_1. *En désignant par* $\{u_1\}$ *le* g_π *abélien principal dérivé des* u_1 (*normaux dans* P), $P|\{u_1\}$ *est un* $g_{\pi^{2n-1}}$ *abélien principal* (*cf. E.*, 142-145 *pour* $\pi = p$). *Les équations de* P *sont formées des équations de* $\{u_1\}$ *jointes à celles des relations du n°* **7** *où figurent les seuls générateurs de* P; car ces équations définissent un groupe d'ordre $\leqq (P, 1)$ (*E.*, 18, 19) et sont vérifiées par P.

Soit P_1 le groupe déduit de H_1 (**4**) comme P de H, et formons de même successivement les groupes P_2, ... Toute substitution de P_i est permutable à P_{i-1} (**7**), en sorte que $PP_1 \ldots P_{\nu-1} = \mathbf{P}_{A(n,\pi)} = \mathbf{P}$ est un $g_{\pi^{\frac{n(n-1)}{2}}}$ sylowien de H.

Écrivons un instant $U_{i\lambda}$ pour u_λ et $U_{i,\nu+1,\rho}$ pour $U_{i\rho\rho}$, désignons par ν_1 la plus haute valeur du second indice de U_{ik} dans P (donc ν_1 est $\geqq \nu$, et $\nu + \nu_1 = n$), et formons le tableau triangulaire

$$\begin{array}{cccccccccc}
U_{11} & U_{12} & U_{13} & \ldots & U_{1\nu_1} & V_{1\nu} & V_{1,\nu-1} & \ldots & V_{13} & V_{12} \\
 & U_{22} & U_{23} & \ldots & U_{2\nu_1} & V_{2\nu} & V_{2,\nu-1} & \ldots & V_{23} & \\
 & \multicolumn{9}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\
 & U_{ii} & \ldots & U_{i\nu_1} & V_{i\nu} & V_{i,\nu-1} & \ldots & V_{i,i+1} & & \\
 & \multicolumn{8}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}
\end{array}$$

---

[1] On trouvera des généralisations de ces propriétés dans un article déjà cité (*Comptes rendus*, t. 161, p. 553) et dans un Mémoire ultérieur.

la dernière ligne se réduisant à $U_{\nu\nu}$ si $\nu_1 = \nu$, et aux deux termes $U_{\nu\nu}$, $U_{\nu,\nu+2}$ si $\nu_1 = \nu + 1$, et les V disparaissent si $\nu = 1$. Appelons $s^{\text{ième}}$ *transversale* la rangée de termes (parallèle au côté droit du triangle) formée du $s^{\text{ième}}$ terme de la première ligne, du $(s-2)^{\text{ième}}$ de la seconde, ... du $[s - 2(i-1)]^{\text{ième}}$ de la $i^{\text{ième}}$, ... *Pour* $n \leqq 3$, **P** *est abélien. Pour* $n > 3$, *le* $s^{\text{ième}}$ *central* (*E.*, 94) C_s *de* **P** *est le p. p. c. m. des* U_{ik}, V_{ik} *des s premières transversales, c'est-à-dire le p. p. c. m. des* U_{ik} *où* $i + k$ *est* $\leqq s + 1$ *et des* V_{ik} *où* $k - i$ *est* $\geqq n - s$: *l'ordre de* C_s *est alors* $\pi^{\frac{s(s+1)}{2}}$. Montrons que si le théorème est vrai pour $C_s (C_0 = 1)$, il l'est pour C_{s+1}. Soit ξ un élément de C_{s+1} hors de C_s, exprimé par les générateurs de **P** en faisant passer ceux de P_i avant ceux de P_{i+1}. Si ξ contient (dans l'expression considérée) un V_{kl} hors de C_s, $l - k$ est $\leqq n - s - 1$. Or, pour $k > 1$, $V_{k-1,k}$ transforme V_{kl} en $V_{k-1,l} V_{kl}$. Pour que $C_s \xi$ soit permutable à $V_{k-1,k}$, il faut donc que $V_{k-1,}$ soit dans C_s, d'où $l - k \geqq n - s - 1$. Donc $l - k = n - s - 1$. Pour $k = 1$ et $l = \nu$, la permutabilité avec $V_{l,l+1}$ conduit de même à $l - k = n - s - 1$. Pour $k = 1$ et $l = \nu$, la permutabilité avec $U_{\nu\nu_1}$ exige que C_s contienne $U_{1\nu_1}$ d'où $1 + \nu_1 \leqq s + 1$, et de même $l - k = n - s - 1$. Si ξ contient un U_{kl} ($k \leqq l$ si $l \leqq \nu$; $k < l$ si $l > \nu$) hors de C_s, $k + l$ est $\geqq s + 2$. Or, pour $k > 1$, $V_{k-1,k}$ transforme U_{kl} en $U_{k-1,l} U_{kl}$ si $l \leqq \nu$ et $k < l$, et en $U_{k-1,k} U_{k-1,l} U_{kl}$ si $l > \nu$ ou si $k = l$. Donc $k - 1 + l$ est $\geqq s + 1$, et $k + l = s + 2$. Pour $k = 1$ et $1 < l \leqq \nu$, $V_{l-1,l}$ transforme U_{1l} en $U_{1,l-1} U_{1l}$, d'où $l \geqq s + 1$, et de même $k + l = s + 2$. Pour $k = l = 1$, la condition $k + l \geqq s + 2$ donne $s = 0$, d'où encore $k + l = s + 2$. Pour $k = 1$, $l = \nu + 1$ et $\nu > 1$, $U_{\nu l}$ transforme U_{kl} en $U_{1\nu} U_{kl}$, d'où $1 + \nu \leqq s + 1$, et encore $k + l = s + 2$. Pour $k = \nu = 1$ et $l = 2$, **P** est abélien. Donc, pour $n > 3$, ξ ne doit contenir que les générateurs de l'énoncé, et cela suffit, car alors tout générateur de **P** transforme tout générateur de ξ en un élément de $C_s \xi$. L'ordre de C_s se calcule en comptant les éléments à prendre dans chaque ligne du tableau rectangulaire.

Les substitutions de **P** ont la forme générale

$$\alpha_{\mathbf{P}} = \left(\begin{array}{cc|cc|cc|c}
1 & \alpha'_{11} & \alpha_{12} & \alpha'_{12} & \alpha_{13} & \alpha'_{13} & \cdots \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
\hline
0 & \alpha'_{21} & 1 & \alpha'_{22} & \alpha_{23} & \alpha'_{23} & \cdots \\
0 & \beta'_{21} & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\
\hline
0 & \alpha'_{31} & 0 & \alpha'_{32} & 1 & \alpha'_{33} & \cdots \\
0 & \beta'_{31} & 0 & \beta'_{32} & 0 & 1 & \cdots \\
\cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdots
\end{array}\right) \quad (^1)$$

les coefficients situés au-dessus de la diagonale (ou ceux situés au-dessous) étant arbitraires, et les autres étant déterminés par ceux-là d'après les relations (4)-(6) [ou (8)-(10)].

Toute substitution λ de H permutable à **P** vérifie $\alpha_{\mathbf{P}}\lambda = \lambda\gamma_{\mathbf{P}}$, $\gamma_{\mathbf{P}}$ étant dans **P**. Supposons que λ se déduise de la substitution α du n° **5** en remplaçant α_{ik}, α'_{ik}, β_{ik}, β'_{ik} par λ_{ik}, λ'_{ik}, μ_{ik}, μ'_{ik} respectivement. La comparaison des coefficients de y_1 et de x_2 dans les fonctions que $\alpha_{\mathbf{P}}\lambda$ et $\lambda\gamma_{\mathbf{P}}$ substituent à y_1 donne

$$\mu_{11}\alpha'_{11} + \mu_{12}\alpha'_{21} + \mu'_{12}\beta'_{21} + \mu_{13}\alpha'_{31} + \mu'_{13}\beta'_{31} + \ldots = 0. \qquad \mu_{11}\alpha_{12} = 0.$$

Or on peut supposer α_{12} arbitraire. Donc $\mu_{11} = 0$. En prenant alors pour $\alpha_{\mathbf{P}}$ une substitution où α'_{21}, β'_{21} soient arbitraires, on voit que μ_{1j}, μ'_{1j} sont nuls pour $j \neq 1$. Alors, d'après (8) et (10) les λ_{j1}, μ_{j1} où $j \neq 1$ sont nuls, et $\lambda_{11}\mu'_{11} = 1$. En multipliant λ à droite par une substitution de **P** on peut annuler les λ'_{j1}, μ'_{j1} où $j \neq 1$. Alors, d'après (5) et (6), tous les coefficients des deux premières lignes et colonnes sont nuls sauf λ_{11} et μ'_{11} qu'on réduira à 1 en multipliant à droite par une m_1. La substitution obtenue est alors dans H_1. En continuant ainsi on voit que λ est dans **MP**, **M** étant le p. p. c. m. (abélien) des m_j ($j = 0$). *Donc* **MP** *est le normalisant de* **P** *dans* H. *L'ordre de* **M** *est évidemment* $(\pi^2 - 1)^\nu$ *si* $n = 2\nu$, *et* $(\pi^2 - 1)^\nu(\pi + 1)$ *si* $n = 2\nu + 1 > 1$.

(1) En rangeant les variables dans l'ordre $y_1, \ldots, y_\nu, x_\nu, x_{\nu-1}, \ldots, x_1$, les coefficients situés au-dessus de la diagonale principale sont tous nuls.

Son p. g. c. d. $\mathbf{M}^0$ *avec* H^0 *est d'indice* $\pi + 1$ *dans* $\mathbf{M} = \Sigma_0^\pi \mathbf{M}^0 s$, *s ayant le même sens qu'au n°* **2**. *Le normalisant de* $\mathbf{P}$ *dans* H^0 *est* $\mathbf{M}^0\mathbf{P}$. $\mathbf{M}$ *est évidemment* $> J$, *et* $\mathbf{M}^0 > J^0$.

$\mathbf{M}$ *est son propre normalisant dans* $\mathbf{MP}$. Car une relation de la forme $(\mu\alpha_{\mathbf{P}})^{-1}\mu_0\mu\alpha_{\mathbf{P}} = \mu_1$, μ, μ_0, μ_1 étant dans $\mathbf{M}$, entraînerait, puisque $\mathbf{M}$ est abélien, $\mu_0\alpha_{\mathbf{P}} = \alpha_{\mathbf{P}}\mu_1$; d'où, comme on le voit directement, $\mu_0 = \mu_1$, et, μ_0 parcourant $\mathbf{M}$, $\alpha_{\mathbf{P}} = 1$.

III. — Groupe gauche.

16. Soit maintenant $\bar{a} = -a$ et $\alpha a \bar{\alpha} = fa$ (d'où $|\alpha|^2 = f^n$). Supposons a réduite à la forme canonique $\Sigma_1^\nu(x_i y'_i - y_i x'_i)$ $(n = 2\nu)$ (*E.*, 195, 201, 202; *cf. S.*, p. 225), les variables de la première série étant $x_1, y_1, \ldots, x_\nu, y_\nu$, et les variables correspondantes de la seconde $x'_1, y'_1, \ldots, x'_\nu, y'_\nu$ (cogrédientes à $x_1, y_1, \ldots, x_\nu, y_\nu$). Le groupe A sera dit alors *groupe gauche n-aire de* $\mathfrak{Q}$, et le groupe $\mathfrak{A}$ *groupe gauche homogène ou fractionnaire n-aire de* $\mathfrak{Q}$. Je préciserai ces formes de A, $\mathfrak{A}$ en remplaçant partout les lettres A, $\mathfrak{A}$ par G, $\mathfrak{G}$.

Posons

$$\gamma = \begin{vmatrix} x_i & \iota x_i \\ y_i & y_i \end{vmatrix}, \qquad \mu_\rho = \begin{vmatrix} x_i & \rho x_i \\ y_i & \rho^{-1} y_i \end{vmatrix} \qquad (i = 1, \ldots, \nu).$$

Il est clair que $G' = \Sigma_0^{\pi-2} G\gamma^k$, et que $G\gamma^k$ est formé des substitutions de G qui multiplient a par ι^k. $|\gamma|$ est premier à G, tandis que le p. g. c. d. de G, I est D. *Si donc p est* > 2, γ est hors de GI; mais $\gamma^2 = \mu_\iota|\iota|$ est dans GI, et $G' = GI + GI\gamma$. *Si* $p = 2$, $G' = GI$. Pour $p > 2$, $GI = G''$ est le groupe des substitutions qui multiplient a par un carré.

Ici $\mathfrak{G}' = G'|I$, $\mathfrak{G} = GI|I = G|D$. Donc, *si* $p > 2$, $\mathfrak{G}'|\mathfrak{G} = G'|GI$ est d'ordre 2, et $(\mathfrak{G}' 1) = (G, 1)$. *Si* $p = 2$, $\mathfrak{G}' = \mathfrak{G} \equiv G$.

17. Pour qu'une substitution

$$\alpha = \begin{vmatrix} x_i & \Sigma_k(\alpha_{ik} x_k + \alpha'_{ik} y_k) = X_i \\ y_i & \Sigma_k(\beta_{ik} x_k + \beta'_{ik} y_k) = Y_i \end{vmatrix} \qquad (i, k = 1, \ldots, \nu)$$

multiplie a par f, il faut et suffit que l'on ait

$$(1)\quad \Sigma_i(\alpha_{ij}\beta'_{ik}-\beta_{ij}\alpha'_{ik})=\begin{cases}0 & \text{si } j\neq k\\ f & \text{si } j=k\end{cases}\qquad (i,j,k=1,\ldots,\nu).$$

$$(2)\quad \Sigma_i(\alpha_{ij}\beta_{ik}-\beta_{ij}\alpha_{ik})=\Sigma_i(\alpha'_{ij}\beta'_{ik}-\beta'_{ij}\alpha'_{ik})=0$$

Comme ici $a^2=-\varepsilon$, ε étant la matrice unité d'ordre n, l'équaquation $\alpha a\bar{\alpha}=fa$ donne $f\alpha^{-1}=-a\bar{\alpha}a$, d'où

$$f\alpha^{-1}=\begin{vmatrix} x_i & \Sigma_k(\quad\beta'_{ki}x_k-\alpha'_{ki}y_k)=X'_i\\ y_i & \Sigma_k(-\beta_{ki}x_k+\alpha_{ki}y_k)=Y'_i\end{vmatrix}\qquad (i,k=1,\ldots,\nu),$$

et $\bar{\alpha}a\alpha=fa$ qui montre que G' (*et de même* G) *contient la transposée de chacune de ses subtitutions.*

Les conditions analogues à (1), (2) écrites pour $\bar{\alpha}$ ou pour α^{-1}, *a priori* équivalentes à (1), (2) sont (α^{-1} multiplie a par f^{-1})

$$(3)\quad \Sigma_i(\alpha_{ji}\beta'_{ki}-\beta_{ki}\alpha'_{ji})=\begin{cases}0 & \text{si } j\neq k\\ 1 & \text{si } j=k\end{cases}\qquad (i,j,k=1,\ldots,\nu).$$

$$(4)\quad \Sigma_i(\alpha_{ji}\alpha'_{ki}-\alpha'_{ji}\alpha_{ki})=\Sigma_i(\beta_{ji}\beta'_{ki}-\beta'_{ji}\beta_{ki})=0$$

Ces formules ne sont d'ailleurs qu'un cas particulier de celles du n° **5**, celui où $n=2\nu$ et où α est dans $\mathfrak{S}$.

18. Désignons par $(1)_l$, $(2)_l$, $(3)_l$, $(4)_l$ ce que deviennent (1), (2), (3), (4) pour $j=k=l$.

G *contient une* α *dont les deux premières colonnes sont formées d'une solution arbitraire de* $(1)_1$ *pour* $f=1$. Car soit τ une substitution n-aire ayant les deux premières colonnes voulues. Elle transforme a en $(x_1+u)(y'_1+v')-(y_1+v)(x'_1+u')+a_1$, u, v, a_1 $(=-\overline{a_1})$ ne contenant ni x_1 ni y_1, et u', v' se déduisant de u, v par l'accentuation des variables. Si donc τ_1 est une substitution qui remplace x_1, y_1 par x_1-u, y_1-v et dont l'action sur x_2, y_2, ... canonise a_1, $\tau_1\tau$ répond à la question. *Les substitutions de cette sorte forment le complexe* $G_1\alpha_0$, α_0 *étant l'une d'elles, et* G_1 *le diviseur de* G *formé des substitutions qui remplacent les* x_i, y_i *où* $i>1$ *par des fonctions de ces seules variables et* x_1, y_1 *par* x_1+X, y_1+Y, X *et* Y *ne dépendant pas de* x_1, y_1 (*cf.* **4**). Or les conditions (1), (2) où l'on

fait un des seconds indices égal à 1 montrent que $X = Y = 0$, et que G_1 *est le groupe des substitutions de* $a - (x_1 y'_1 - y_1 x'_1)$, *et est par suite semblable à* $G(n-2, \pi)$.

De même les substitutions de G *dont les deux premières lignes forment une solution donnée de* $(3)_1$ *forment le complexe* $\alpha_0 G_1$, α_0 *étant l'une d'elles, qui existe toujours.*

Comme $(1)_1$ a $\pi^{n-1}(\pi^n - 1)$ solutions (*E.*, 44, 45; on le voit d'ailleurs ici immédiatement), il résulte de là que l'*ordre de* $G(n, \pi)$ *est* $\pi^{\nu^2} \Pi_1^{\nu} (\pi^{2i} - 1)$.

19. G contient évidemment toutes celles des substitutions de $H^0(2\nu, \pi)$ indiquées au n° **6** pour lesquelles ρ est dans ε, et ces substitutions vérifient les relations du n° **7** où ne figure pas l'indice o.

G *dérive des* τ_i, *des* u_{ik} *et des* V_{ik} (λ *réel*). Admettons-le en effet pour les valeurs de n inférieures à celle considérée. Il suffit de montrer que, α étant dans G, on peut, en la multipliant à droite par des τ_i, u_i, V_{ik}, la réduire à une substitution de G_1. Or les α_{i1}, β_{i1} n'étant pas tous nuls, on peut en multipliant α à droite par une V, une U, une u ou une m, rendre α_{11} égal à 1, puis, de même, par les V, annuler tous les α_{i1} où $i \neq 1$. On annulera β_{11} par une v, et les β_{i1} où $i \neq 1$ par les W. Alors, d'après (1), $\beta'_{11} = 1$. On pourra donc, par les V, annuler les β'_{i1} où $i \neq 1$. On annulera ensuite α'_{11} par une u, et les α'_{i1} où $i \neq 1$ par les U.

Donc toute substitution de G *a un déterminant égal à* 1 (comme les τ, u, V), *et toute substitution de* G′ *qui multiplie a par* ι^k *a un déterminant égal à* $\iota^{k\nu}$. *Donc* $G(2, \pi) = U(2, \pi)$ (*S.*, 74).

20 [1]. Cherchons les p. g. c. d. respectifs Γ et Γ' de $G(n, \pi^2)$ et $G'(n, \pi^2)$ avec $H(n, \pi)$. Toute substitution α de Γ' devra vérifier, en même temps que les équations (4)-(6) du n° **5** (avec $f = 1$, $\eta = 0$), les équations (1)-(4) du n° **17**. En particulier les deux systèmes linéaires formés, l'un des systèmes (5) et (6) du n° **5** où l'on regarde k comme fixe (et $f = 1$, $\eta = 0$), l'autre du système (1) et du second système (2) du n° **17** où l'on regarde aussi k comme fixe, déterminent

---

[1] *Comparer* Dickson, *Linear groups*, 131.

l'un $\dot{\beta}'_{ik}$, $\dot{\alpha}'_{ik}$, l'autre $f^{-1}\beta'_{ik}$, $f^{-1}\alpha'_{ik}$ par les mêmes équations. Donc, $\alpha'_{ik} = f\dot{\alpha}'_{ik}$, $\beta'_{ik} = f\dot{\beta}'_{ik}$, et de même $\alpha_{ik} = f\dot{\alpha}_{ik}$, $\beta_{ik} = f\dot{\beta}_{ik}$. *Donc d'abord* Γ, *qui correspond à* $f = 1$, *est dans* $\mathfrak{S}$, *et ses matrices coïncident avec celles de* $G(n, \pi)$ [les variables de $G(n, \pi)$ différant de celles de $G(n, \pi^2)$, $G(n, \pi)$ n'est qu'un constituant de Γ isomorphe à Γ; mais aucune confusion n'étant à craindre, j'identifierai ici Γ avec $G(n, \pi)$. Ensuite, e désignant un élément $\neq 0$ de α, $f = e\dot{e}^{-1} = e^{1-\pi}$ est une puissance de $\iota'^{\pi-1}$. Or $\mu_{v'}$ multiplie précisément a par $\iota'^{1-\pi}$. *Donc, en posant* $\{\mu_{v'}\} = M$, $\Gamma' = \Gamma M$, et $(\Gamma', \Gamma) = \pi + 1$. Il est clair que Γ' *contient* J, dont chaque substitution multiplie a par une puissance de $\iota'^{2(\pi-1)}$.

Le normalisant $\overline{G}(n, \pi)$ *de* $G(n, \pi)$ *dans* $H(n, \pi)$ *coïncide avec* Γ'. En effet, soit s une substitution de H permutable à G, et $\alpha s = s\alpha'$, α et α' étant dans G. Alors $\alpha s a \bar{s} \bar{\alpha}$ coïncide avec $s\alpha' a \overline{\alpha' s} = s a \bar{s}$. Donc $s a \bar{s} = a'$ $(= -\bar{a}')$ est invariante par toute substitution de G. Or, soit

$$a' = \Sigma_{ik}[x_i(a_{ik}x'_k + a'_{ik}y'_k) + y_i(b_{ik}x'_k + b'_{ik}y'_k)].$$

On voit directement que, pour que a' soit invariante par m_{ii} quel que soit i, il faut que a' ait la forme $\Sigma_i f_i(x_i y'_i - y_i x'_i)$ et que, pour que a' soit encore invariante par les V_{ik}, il faut que les f_i soient égaux. Donc s est dans Γ'.

Soit $\overline{\mathcal{G}} \equiv \overline{G} | J$ *le groupe déduit de* G *en y regardant les variables comme homogènes. Le normalisant de* $\mathcal{G} \equiv GJ | J \equiv G | D$ *dans* $\mathcal{H} \equiv H | J$ *est* $\overline{\mathcal{G}}$. *Si* $p > 2$, $(\overline{\mathcal{G}'}, 1) = 2(\mathcal{G}, 1)$. *Si* $p = 2$, $(\overline{\mathcal{G}}, 1) = (\mathcal{G}, 1)$.

Le normalisant $\overline{G^0}$ de G dans H^0 est le p. g. c. d. de $\overline{G}$, H^0. Or G divise H^0, et pour que le déterminant $\iota'^{k\nu(1-\pi)}$ de $\mu_{v'}^k$ soit égal à 1, il faut que k soit multiple de $\frac{\pi+1}{\pi'_1}$, π'_1 étant le p. g. c. d. de $\pi + 1$, ν. *Donc, si* M^0 *est le diviseur d'ordre* π'_1 *de* M (*c'est-à-dire le p. g. c. d. de* M, H^0), $\overline{G^0} = GM^0$, et $(\overline{G^0}, 1) = \pi'(G, 1)$.

Soit $\overline{\mathcal{G}^0} \equiv \overline{G^0} | J^0$ *le groupe déduit de* $\overline{G^0}$ *en y regardant les variables comme homogènes. Le normalisant de* $\overline{\mathcal{G}} \equiv GJ^0 | J^0 \equiv G | D$ *dans* $\mathcal{H}^0 \equiv H^0 | J^0$ *est* $\mathcal{G}^0$. *Si* $p > 2$, *et si* $\pi'_1 = \pi_1$, $(\overline{\mathcal{G}^0}, 1) = 2(\mathcal{G}, 1)$. *Si* $p = 2$ *ou si* $2\pi_1 = \pi_1$, $(\overline{\mathcal{G}_0}, 1) = (\mathcal{G}, 1)$.

21. On a vu que $G(2, \pi) = U(2, \pi)$ (**19**). Pour $n > 2$, $\pi > 2$, on voit comme au n° **10** (¹) que $G \mid D$ est simple. Pour $n > 2$, $\pi = 2$, on voit de même que tout diviseur normal Γ de G non contenu dans D contient les $W_{ik1} c_{k1} = c_{k1} W_{ik1}$ donc, si $n \geqq 6$, les $W_{ik1} c_{k1} \cdot c_{k1} W_{ik1} = V_{i1}^{-1} W_{ik1} V_{i1}$ (**7**), donc les W_{ik} et par suite, encore de même, les V_{ik}, U_{ik}, u_i, τ_i, donc G.

Ainsi, en exceptant $G(2, 2) = U(2, 2)$, $G(2, 3) = U(2, 3)$ *et* $G(4, 2)$ *qui va être étudié, tout diviseur normal de* $G(n, \pi)$ *non contenu dans* D *coïncide avec* G; *alors* $\mathcal{G}(n, \pi) \equiv G \mid D$ *est simple, et* D *est le central de* G (*donc, si* $p > 2$, $\mathcal{G}' \not\equiv G$).

On vérifie d'ailleurs comme au n° **10** que *toute substitution* α *permutable à chaque substitution de* G *est une similitude. Donc le central de* G' *est* 1.

22. $G(4, 2)$ *est isomorphe au* g^6 *symétrique* (²). — En effet, $G(4, 2)$ est un g_{720}^{15} divisant le $g^{15} L(4, 2)$. Or, en désignant par s_k et $\mathcal{A}_k$ le symétrique et l'alterné de champ $1, \ldots, k$, $L(4, 2) \equiv \mathcal{A}_8 (S., 70)$. Donc G est isomorphe à un g_{720}^8 pair Γ. Si Γ était transitif, il serait primitif, 720 ne divisant ni $4!\, 2^4$ ni $2(4!)^2$ ($S.$, 32); mais alors le g_{90}^7 fixant un symbole serait de degré effectif 7 et contiendrait des s_5 et des s_3^6 [s'il contenait des s_3^3, Γ devrait être semblable à $\mathcal{A}_8 (S., 42)$]; il serait donc transitif tandis que 7 ne divise pas 90. Donc Γ est intransitif, et si les degrés de ses constituants transitifs sont $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ ($\alpha_i \geqq \alpha_{i+1} \geqq 1$; $\Sigma \alpha_i = 8$), 720 divise $\Pi(\alpha_i!)$, d'où $\alpha_1 = 6$. On peut donc supposer que Γ divise $\{s_6, 78\}$, et comme Γ est un g_{720}^8 pair, il ne peut être que le diviseur pair maximum $s_6' \equiv s_6$ de $\{s_6, 78\}$. On voit par là que *tous les* g_{720}^8 *de* $\mathcal{A}_8$ *sont conjugués dans* s_8 *et par suite dans* $\mathcal{A}_8$ (car le normalisant de Γ par exemple dans s_8, contenant 12, Γ a le même nombre de conjugués dans s_8 et $\mathcal{A}_8$.

Voici une autre démonstration qui fournit une correspondance de

---

(¹) Le second procédé employé au n° **10** pour rendre $\beta_{11} \neq 0$ est seul applicable ici.

(²) M. Jordan a établi ce théorème (*Traité*, n° 335) à l'aide des groupes de Steiner. On en trouvera encore une preuve indirecte dans une Note déjà citée du 8 novembre 1915 (*Comptes rendus*, t. 161, p. 553).

générateurs. s_6 est défini (*S.*, 69) par

$$(5)\qquad \begin{cases} s_h^2 = (s_i s_{i+1})^3 = (s_j s_{j+k})^2 = 1 \\ (h = 1, \ldots, 5;\ i = 1, 2, 3, 4;\ j = 1, 2;\ k = 2, \ldots, 4 - j). \end{cases}$$

Or les substitutions τ_1, u_1, u_2, τ_2, $\tau_1 v_2 V_{21} U_{12} v_2$, prises respectivement pour $s_1, \ldots, s_5$, les vérifient. Donc leur p. p. c. m., qui est d'ordre > 2, est isomorphe à $\mathfrak{s}_6$ (*S.*, 66) (¹).

On arrive au même résultat en prenant pour $s_1, \ldots, s_5$ respectivement les substitutions $v_1 v_2 U_{12} v_1 v_2$, $\tau_2 v_1 u_2 u_1 T_{12}$, $W_{12} V_{12} v_2$, $v_1 W_{12} V_{21}$, $u_2 V_{21} U_{12}$.

Il est utile de montrer comment on arrive à ces deux correspondances de générateurs, et comment la seconde conduit à une correspondance *simultanée* des générateurs de L(4, 2), G(4, 2) avec ceux de $\mathfrak{A}_8$, $\mathfrak{s}_6'$ [donc de nouveau à l'isomorphisme de L(4, 2) avec $\mathfrak{A}_8$].

Les s_2 impaires de s_6 se divisent en deux classes, l'une C_1 formée des s_2^2, l'autre C_2 des s_2^6. A une s_2 quelconque $s_{\rho 1}$ de C_ρ on peut en joindre quatre autres $s_{\rho 2}, \ldots, s_{\rho 5}$ (de C_ρ) telles que $s_{\rho 1}, \ldots, s_{\rho 5}$ prises pour $s_1, \ldots, s_5$ vérifient (5). Car on peut toujours écrire $s_{11} = 12$, $s_{13} = 34$, $s_{14} = 56$; alors s_{12}, déplaçant un des symboles déplacés par s_{11} et un des symboles déplacés par s_{13}, mais ne déplaçant aucun de ceux déplacés par s_{15}, peut s'écrire 23 ; s_{14} peut s'écrire 45 ; et ces substitutions vérifient (5). De même on peut toujours écrire $s_{21} = 12.34.56$, $s_{23} = 12.35.46$ (s_{23} a un cycle commun avec s_{21}). Alors $s_{25} = 12.36.45$; s_{22}, ayant un cycle commun avec s_{25}, mais n'en ayant aucun avec s_{21} ou s_{23}, peut s'écrire (en transformant au besoin tout par s_{21}, s_{23} ou s_{25}) 15.24.36; alors s_{24} a l'une des deux formes 34.26.15, 56.13.24, et (en transformant au besoin tout par s_{25}) on peut supposer que $s_{24} = 13.24.56$. Les s_{2l} vérifiant (5) comme les s_{1l}, $\mathfrak{s}_6$ *a un automorphisme où* $s_{11}, \ldots, s_{15}$ *répondent à* $s_{21}, \ldots, s_{25}$ *respectivement.*

En posant

$$\alpha = 12 = s_{11}, \qquad \beta = 13 = \alpha s_{12} \alpha, \qquad \gamma = 14 = \beta s_{13} \beta,$$
$$\delta = 15 = \gamma s_{14} \gamma, \qquad \varepsilon = 16 = \delta s_{15} \delta,$$

(¹) Dickson, *Linear groups*, 118.

(aux générateurs α, β, γ, δ, ε de s_6 répondent respectivement, dans l'automorphisme considéré,

$$\alpha' = 12.34.56 = s_{21}, \qquad \beta' = 13.26.45 = \alpha' s_{22} \alpha',$$
$$\gamma' = 14.25.36 = \beta' s_{23} \beta', \qquad \delta' = 15.23.46 = \gamma' s_{24} \gamma',$$
$$\varepsilon' = 16.24.35 = \delta' s_{25} \delta'),$$

on a

$$(6) \qquad \begin{cases} s_{21} = \alpha s_{13} s_{15}, \qquad s_{22} = \alpha\gamma\alpha.\delta.\beta\varepsilon\beta, \qquad s_{23} = \beta\delta\beta.\gamma\varepsilon\gamma.\alpha, \\ s_{24} = \alpha\gamma\alpha.s_{15}\beta, \qquad s_{25} = s_{14}.\beta\varepsilon\beta.\alpha. \end{cases}$$

et les s_{1l} s'expriment par les s_{2l} comme les s_{2l} par les s_{1l}. *L'automorphisme est donc d'ordre* 2.

Considérons maintenant les s_2 de $\mathfrak{A}_8$. Elles forment deux classes, l'une de s_2^4, l'autre de s_2^8. Tout g_{720}^8 pair de $\mathfrak{A}_8$, pouvant être identifié avec s_6', a aussi deux classes de s_2, l'une C_1 représentée par 12.78, l'autre C_2 par 12.34.56.78. Au point de vue abstrait ces deux classes ont ceci de commun qu'à une s_2 quelconque $s_{\rho 1}$ de C_ρ on peut en adjoindre quatre, $s_{\rho 2}, \ldots, s_{\rho 5}$ vérifiant (5) et ceci de distinct que, si $\rho = 1$, il existe une s_3 $s_{\rho 0}$ vérifiant

$$(7) \qquad s_{\rho 0}^3 = (s_{\rho 0} s_{\rho 1})^3 = (s_{\rho 0} s_{\rho l})^2 = 1 \qquad (l = 2, \ldots, 5),$$

tandis que, si $\rho = 2$, il n'y en a pas. En effet, si $s_{\rho 0}$ existe, elle doit, d'après (7), déplacer 7 et 8 (sans quoi $s_{\rho 0} s_{\rho 1}$ aurait un cycle d'ordre $\neq 3$ contenant 7 et 8), et par suite fixer un au moins des symboles 2, 3, 4, 5, 6. Mais $s_{\rho 0}$ doit être transformée en $s_{\rho 0}^{-1}$ par $s_{\rho 2}, \ldots, s_{\rho 5}$ dont le p. p. c. m. permute transitivement 2, 3, 4, 5, 6. Donc $s_{\rho 0}$ les fixe tous. Donc $s_{\rho 0} = (178)^{\pm 1}$, et $\rho = 1$. $\mathfrak{A}_8$ dérive de $s_{10}, s_{11}, \ldots, s_{15}$ et est défini par (5) et (7) (*S.*, 69).

Admettons maintenant qu'il y ait, entre L(4, 2), G(4, 2) d'une part, et $\mathfrak{A}_8$, s_6' d'autre part, une correspondance isomorphique simultanée, et cherchons à la réaliser. Je désignerai les objets correspondant à $s_{\rho l}$, C_ρ dans L par les mêmes lettres que dans $\mathfrak{A}_8$. On aperçoit de suite dans G quatre substitutions semblables pouvant jouer le rôle de $s_{\rho 1}$, $s_{\rho 2}$, $s_{\rho 4}$, $s_{\rho 5}$ relativement aux équations (5) (on verra plus loin que ces substitutions sont conjuguées, et que $\rho = 2$). Ce sont, en désignant (cf. *S.*, 69) respectivement les points 1000, 0100, 0010, 0001, 1100, 1010, 1001, 0110, 0101, 0011, 1110, 1101, 1011, 0111, 1111 par b,

$c, d, e, f, g, h, i, k, l, m, n, o, p, q,$

$$s_{\rho 1} = \tau_1 = bc.gi.hk.op.d.e.f.l.m.n.q,$$
$$s_{\rho 2} = u_1 = cf.im.kn.pq.b.d.e.g.h.l.o,$$
$$s_{\rho 4} = u_2 = el.ho.kp.nq.b.c.d.f.g.i.m,$$
$$s_{\rho 5} = \tau_2 = de.gh.ik.mn.b.c.f.l.o.p.q.$$

$s_{\rho 3}$ doit leur être semblable et engendrer avec $s_{\rho 1}$, $s_{\rho 5}$ un g_8^{15} abélien Y de classe 8 (*S.*, 82). Donc $s_{\rho 3}$ échange entre eux les systèmes d'intransitivité f, l, q, bc, de, mn, op, $ghik$ de $\{s_{\rho 1}, s_{\rho 5}\}$. Si $s_{\rho 3}$ déplace un symbole du seul système de degré 4, Y a un constituant régulier (*S.*, 57) de champ $ghik$, et $s_{\rho 3} = gk.hi\ldots$. Mais alors $s_{\rho 2}s_{\rho 3} = (ngk)(him)\ldots$, et $s_{\rho 3}$ fixe m et n. De même $s_{\rho 3}s_{\rho 4} = (hio)(kgp)\ldots$, et $s_{\rho 3}$ fixe o et p. Donc $s_{\rho 3}$, qui permute entre eux f, l, q (systèmes de degré 1) et qui ne peut fixer q ($s_{\rho 2}s_{\rho 3}$ aurait le cycle pq) a l'un des cycles fq, lq; dans le premier cas $s_{\rho 2}s_{\rho 3}$ aurait le cycle $cqpf\ldots$ d'ordre > 3, et dans le second cas $s_{\rho 3}s_{\rho 4}$ aurait le cycle $lnqe\ldots$. Donc $s_{\rho 3}$ fixe g, h, i, k. Si $s_{\rho 3} = fl\ldots$, $s_{\rho 2}s_{\rho 3} = (elf)\ldots$, $s_{\rho 4}s_{\rho 3} = (efl)\ldots$, et $s_{\rho 3}$ fixe c et e, donc b et d, tandis que la classe de G est 8. Si $s_{\rho 3} = lq\ldots$ ou $fq\ldots$, $s_{\rho 2}s_{\rho 3} = (plq)\ldots$ ou $(pfq)\ldots$, et $s_{\rho 3}$ fixe p, donc o, d'où $s_{\rho 4}s_{\rho 3} = (ho)\ldots$. Donc $s_{\rho 3}$ fixe g, h, i, k, f, l, q et déplace les huit autres symboles. Si $s_{\rho 3} = bc\ldots$, $s_{\rho 3}s_{\rho 4} = (bc)\ldots$; si $s_{\rho 3} = bd\ldots$, $s_{\rho 2}s_{\rho 3} = (bd)\ldots$; si $s_{\rho 3} = be\ldots$, $s_{\rho 2}s_{\rho 3} = (be)\ldots$; si $s_{\rho 3} = bm\ldots$, $s_{\rho 3}s_{\rho 4} = (bm)\ldots$; si $s_{\rho 3} = bn\ldots$, donc $= bn.cm\ldots$, $s_{\rho 3}s_{\rho 4} = (cm)$; si $s_{\rho 3} = bo\ldots$, $s_{\rho 2}s_{\rho 3} = (bo)\ldots$; donc $s_{\rho 3} = bp.co\ldots$. Si $s_{\rho 3} = de\ldots$, $s_{\rho 2}s_{\rho 3} = (de)\ldots$. Donc

$$s_{\rho 3} = bp.co.dn.em.f.g.h.i.k.l.q = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 + x_2 + y_2 \\ y_1 & x_1 + x_2 + y_2 \\ x_2 & x_1 + y_1 + y_2 \\ y_2 & x_1 + y_1 + x_2 \end{vmatrix} = \tau_1 c_2 V_{21} U_{12} c_2.$$

Donc $G(4, 2) \equiv S_6$. *Donc* G *n'a que deux classes de* s_2. *Donc*, G *contenant, on va le voir, des* s_2^{12}, $s_{\rho 1}, \ldots, s_{\rho 5}$ *sont conjuguées.*

Pour déterminer ρ, cherchons une s_3 $s_{\rho 0}$ vérifiant (7). $s_{\rho 0}$, devant être transformée par $s_{\rho 2}, \ldots, s_{\rho 5}$ en $s_{\rho 0}^{-1}$, ne peut avoir de cycle de la forme $b\xi\eta$, car toutes les déterminations possibles de ξ conduisent à des impossibilités. Donc $s_{\rho 0}$ fixe b, et par suite aussi les 10 symboles

$b, d, e, i, k, l, m, n, p, q$ qui forment un système d'intransitivité de $\{s_{\rho 2}, \ldots, s_{\rho 5}\}$. Les 5 symboles restants formant un second système d'intransitivité du même groupe, $s_{\rho 0}$, qui en fixe nécessairement deux, les fixe tous. *Donc $s_{\rho 0}$ n'existe pas, et $\rho = 2$.*

On a alors, d'après (6),

$$s_{11} = bo.cp.dm.en.gk.hi.f.l.q = \begin{vmatrix} x_1 & x_1 + x_2 + y_2 \\ y_1 & y_1 + x_2 + y_2 \\ x_2 & x_1 + y_1 + x_2 \\ y_2 & x_1 + y_1 + y_2 \end{vmatrix} = v_1 v_2 U_{12} v_1 v_2,$$

$$s_{12} = be.cl.df.gn.iq.ko.h.m.p = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 + y_2 \\ y_1 & x_2 \\ x_2 & y_1 \\ y_2 & x_1 + y_1 \end{vmatrix} = v_2 v_1 u_1 u_2 T_{12},$$

$$s_{13} = bh.ck.dm.gp.io.lq.e.f.n = \begin{vmatrix} x_1 & x_1 + x_2 \\ y_1 & y_1 + x_2 \\ x_2 & x_2 \\ y_2 & x_1 + y_1 + y_2 \end{vmatrix} = W_{12} V_{12} v_2,$$

$$s_{14} = bo.di.ek.fq.gn.hm.c.l.p = \begin{vmatrix} x_1 & x_1 \\ y_1 & y_1 + x_2 + y_2 \\ x_2 & x_1 + x_2 \\ y_2 & x_1 + y_2 \end{vmatrix} = v_1 W_{12} V_{21},$$

$$s_{15} = bg.ci.en.hp.ko.lq.d.f.m = \begin{vmatrix} x_1 & x_1 + y_2 \\ y_1 & y_1 + y_2 \\ x_2 & x_1 + y_1 + x_2 \\ y_2 & y_2 \end{vmatrix} = u_2 V_{21} U_{12}.$$

$\{s_{12}, \ldots, s_{15}\}$ étant transitif, s_{10} est une s_3^{10}, et les divers essais possibles montrent que le cycle contenant f est flq ou fql, et que tous les autres cycles de s_{10} sont déterminés par celui-là. En échangeant au besoin s_{10} et s_{10}^2, on a

$$s_{10} = beh.cdi.flq.gpn.kom = \begin{vmatrix} x_1 & y_2 \\ y_1 & x_2 \\ x_2 & y_1 + x_2 \\ y_2 & x_1 + y_2 \end{vmatrix}.$$

$s_{11}, \ldots, s_{15}$ et s_{10} vérifiant (5) et (7), la double correspondance isomorphique annoncée est établie.

Comme $s_{21}, \ldots, s_{25}$ répondent à des transpositions de $\mathcal{S}_6$, le g_{360} simple G^0 de G est formé de toutes les substitutions qui sont des produits d'un nombre pair de s_{2i}. En particulier G^0 *contient la* $s_3\, u_1 \tau_1$, *mais ne contient pas*

$$V_{12} = s_{21} s_{25} s_{22} s_{21} s_{23} \cdot s_{25} s_{24} s_{23} s_{22} s_{21} \cdot s_{23}.$$

G (4, 2) *est semblable au* g^{15}_{720} *primitif formé des substitutions opérées par* $\mathcal{S}_6$ *sur les* 15 *combinaisons des* 6 *symboles* 2 *à* 2 (*S.*, 48) (¹). En effet, si l'on fait correspondre $s_{21}, \ldots, s_{25}$ à 12, 23, 34, 45, 56 respectivement, et si l'on cherche à identifier chaque combinaison avec un des symboles $b, \ldots, q$, de manière que $s_{21}, \ldots, s_{25}$ fixent les mêmes combinaisons que 12, 23, 34, 45, 56, on voit aisément que l'identification est possible mais d'une seule manière : il faut identifier 12, 13, 14, 15, 16, 23, 24, 25, 26, 34, 35, 36, 45, 46, 56 avec $f, c, e, h, g, b, p, k, i, q, n, m, d, e, l$ respectivement.

Les substitutions $s_{21}, s_{22}, s_{23}, s_{25}$ correspondant à 12, 23, 34, 56 de $\mathcal{S}_6$, leur p. p. c. m. X correspond au $g_{48}\{s_1, 56\}$. Donc X est le g_{48} fixant l dans G (4, 2). X a les deux systèmes d'intransitivité *befopq*, *deghikmn* et un g_8 normal correspondant à $\{12.34, 13.42, 56\}$.

(¹) Plus généralement, *toutes les représentations du symétrique* $\mathcal{S}$ *ou de l'alterné* $\mathcal{A}$ *de champ* 1, 2, 3, 4, 5, 6 *en* g^{15} *transitif sont semblables*. En effet, on a vu que $\mathcal{S}$ a un automorphisme qui fait correspondre à ses générateurs 12, 13, 14, 15, 16 respectivement les générateurs 12.34.56, 13.26.45, 14.25.36, 15.23.46, 16.24.35 (on le vérifie d'ailleurs directement sur les équations de $\mathcal{S}$); donc au $g_{48}\{12, 13, 14, 56\} = T$, le $g_{48}\{12.34.56, 13.26.45, 14.25.36, 12.45.36\} = T'$ (56 est la transformée de 16 par 15). T et T' ne sont pas conjugués, car T a le $g_3\{123\}$, et T' le $g_3\{164.235\}$. Le p. g. c. d. de T, $\mathcal{A}$ est $B = \{12.56, 13.56, 14.56\}$, et celui de T', $\mathcal{A}$ est $B' = \{35.46, 16.23, 15.24\}$. D'ailleurs T est le seul g_{48} de $\mathcal{S}$ contenant B, car un tel g_{48}, ayant les constituants symétriques $\{56\}$, $\{12, 13, 14\}$, est leur produit direct. Par suite T' est le seul g_{48} de $\mathcal{S}$ contenant B'. Donc, T et T' n'étant pas conjugués dans $\mathcal{S}$, B et B' ne le sont pas non plus. Or $\mathcal{A}$ n'a que deux systèmes de g_{24} conjugués (*voir*, par exemple, Dickson, *Linear groups*, 260) représentés par B et B'. *Donc* $\mathcal{S}$ *n'a que deux systèmes de* g_{48} *conjugués représentés par* T *et* T', car si T'' en représentait un troisième, le p. g. c. d. B'' de T'', $\mathcal{A}$, devrait être conjugué de B ou de B', et T'', déterminé par B'', serait conjugué de T ou de T'. De là résulte le théorème (*S.*, 54).

D'après ce qui a été dit de $\mathcal{A}_8$, tout g_{720}^{15} G′ de L y est conjugué de G. Donc G′ a un invariant bilinéaire a' et se transforme en G quand on prend des variables ramenant a' à la forme canonique a. G′ étant donné, on peut déterminer a' par la méthode des coefficients indéterminés, et l'on sait effectuer un changement de variables ramenant a' à a (*E.*, 195).

25. Soit $P_{A(n,\pi)} = P = P_0$ le p. p. c. m. des V_{1k}, U_{1k} $(k = 2, \ldots, \nu)$, u_1. *En désignant par* $\{u_1\}$ *le* g_π *abélien principal dérivé des* u_1 *(tous normaux dans* P*),* $P\{\{u_1\}$ *est un* $g_{\pi^{n-2}}$ *abélien principal (si* $p = 2$, P *est un* $g_{\pi^{n-1}}$ *abélien principal). Les équations de* P *se lisent sur celles indiquées au n°* **15**.

Soit P_1 le $g_{\pi^{n-3}}$ analogue à P dans G_1, et formons de même successivement les groupes $P_2, \ldots$. Toute substitution de P_i est permutable à P_{i+1}, en sorte que $PP_1 \ldots P_{\nu-1} = \mathbf{P}_{A(n,\pi)} = \mathbf{P}$ est un g_{π^2} sylowien de G.

Si $n = 2$, $\mathbf{P} = \{u_1\}$ *est abélien. Si* $n > 2$, en adoptant les mêmes notations qu'au n° **15**, on démontre de même que, *pour* $p > 2$, *le* $s^{\text{ième}}$ *central* C_s de $\mathbf{P}$ *est le p. p. c. m. des* U_{ik}, V_{ik} *figurant dans les s premières transversales du même tableau triangulaire (ici* $\nu_1 = \nu$*), c'est-à-dire le p. p. c. m. des* U_{ik} *où* $i + k \leqq s + 1$ *et des* V_{ik} *où* $k - i \geqq n - s$. *L'ordre de* C_{2r-1} *est* π^{r^2}, *et celui de* C_{2r} *est* $\pi^{r(r+1)}$, *c'est-à-dire que l'ordre de* C_s *est* π^σ, σ *étant le plus grand entier* $\leqq \left(\frac{s+1}{2}\right)^2$.

Pour $p = 2$, *le* $s^{\text{ième}}$ *central* C_s *de* $\mathbf{P}$ *est le p. p. c. m. des* U_{ik}, V_{ik} *figurant dans les* $s + 1$ *premières transversales, c'est-à-dire le p. p. c. m. des* U_{ik} *où* $i + k \leqq s + 2$ *et des* V_{ik} *où* $k - i \geqq n - s - 1$. *L'ordre de* C_s *est donc* $\pi^{\sigma+1}$. La différence provient de ce que les U_{kl} admissibles dans C_1 sont ici les U_{11} et les U_{12}, U_{12} étant permutable à V_{12}.

Les substitutions de $\mathbf{P}$ ont la forme générale indiquée au n° **15**, et toute substitution de G ayant cette forme est dans $\mathbf{P}$ (*cf.* **15**). On voit de même ici que *le normalisant de* $\mathbf{P}$ *est* $\mathbf{MP}$, $\mathbf{M}$ *étant le* $g_{\pi^{n-1}}$ *p. p. c. m. des* m_i, et que $\mathbf{M}(> D)$ *est son propre normalisant dans* $\mathbf{MP}$.

IV. — Groupes quadratiques.

24. Supposons que a soit la forme quadratique à n variables ($E.$, 44, 45)

$$(1)\qquad a = \varphi + \psi, \qquad \varphi = \Sigma_1^\nu x_i y_i, \qquad \psi = \psi(x, y) = bxy + cx^2 + c'y^2,$$

b, c, c' étant dans $\mathfrak{S}$, et $b^2 - 4cc' = \delta$ étant $\neq 0$ à moins que $b = cc' = 0$. Je poserai $x = x_0$, $y = y_0$ et, si n est pair, $n = 2\nu'$. Je désignerai par $A''(n, \pi, a)$ le groupe des substitutions qui multiplient a par un carré ($A'' = A'$ si $p = 2$), et par N un non carré quelconque de $\mathfrak{S}$.

Si $n = 2\nu'$, et si ψ est irréductible dans $\mathfrak{S}$ (je dirai alors que a est de la *seconde classe* ou du *second type*), je prendrai pour υ une racine de $\psi(\upsilon, 1)$. Soit alors $\varkappa = \varkappa_0 + \upsilon\varkappa_1$ ($\varkappa_0$ et $\varkappa_1$ étant dans $\mathfrak{S}$) une solution quelconque de $\varkappa\dot{\varkappa} = c$, c'est-à-dire de $\psi(\varkappa_{01} - \varkappa_1) = c$ (*cf.* $E.$, 44, 45), et posons

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{ll} x_{\nu'} = \varkappa(x - \upsilon y), & y_{\nu'} = \dot{\varkappa}(x - \dot{\upsilon} y) = \dot{x}_{\nu'} \qquad (\nu' = \nu + 1), \\ \text{d'où} & \\ c\omega x = -\dot{\varkappa}\dot{\upsilon} x_{\nu'} + \varkappa\upsilon y_{\nu'}, & c\omega y = -\dot{\varkappa} x_{\nu'} + \varkappa y_{\nu'} \qquad (\omega = \upsilon - \dot{\upsilon}). \end{array}\right.$$

On aura

$$(3)\qquad \psi = x_{\nu'} y_{\nu'}, \qquad a = \Sigma_1^{\nu'} x_i y_i,$$

et la substitution réelle γ qui multiplie $x_1, \ldots, x_\nu$ par ι et $x_{\nu'}$ par une racine ξ de $\xi^{\pi+1} = \iota$ (donc $y_{\nu'} = \dot{x}_{\nu'}$ par ξ^π) sans altérer les autres variables multiplie a par ι. La substitution réelle μ qui multiplie $x_1, \ldots, x_\nu$ par ι, $y_1, \ldots, y_\nu$ par ι^{-1} et $x_{\nu'}$ par $\xi^{\iota-\pi}$ (donc $y_{\nu'}$ par $\xi^{\pi-\iota}$) est évidemment dans A, et $\gamma^2 = \mu[\iota]$. Donc γ^2 est dans $A'' = AI$, et, si $p > 2$, $A' = A'' + A''\gamma$ (*cf.* **16**).

Si $n = 2\nu'$, et si ψ est réductible dans $\mathfrak{S}$ (je dirai alors que a est de la *première classe* ou du *premier type*), on pourra supposer, ou bien que $\nu' = \nu$ et que $\psi = 0$, ou bien que $\nu' = \nu + 1$ et que ψ est $\neq 0$. Dans la seconde hypothèse on peut réduire ψ à xy; mais on peut aussi, en désignant par k, k' deux éléments de $\mathfrak{S}$ vérifiant $kk' = c$ et par u, u' les racines réelles de $\psi(u, 1)$, écrire les équations déduites de (2), (3) par

la substitution de k, k'. u, u' à $\varkappa$, $\dot{\varkappa}$, υ, $\dot{\upsilon}$ respectivement (en omettant $y_\nu = \dot{x}_\nu$); car $\varkappa$, $\dot{\varkappa}$, υ, $\dot{\upsilon}$ n'interviennent dans le calcul que comme vérifiant les relations $\upsilon + \dot{\upsilon} = -\frac{b}{c}$, $\upsilon\dot{\upsilon} = \frac{c'}{c}$, $\varkappa\dot{\varkappa} = c$ vérifiées ici par k, k'. u, u'. Alors la substitution γ qui multiplie $x_1, \ldots, x_\nu$, par ι sans altérer les y multiplie a par ι. La substitution μ qui multiplie $x_1, \ldots, x_\nu$ par ι et $y_1, \ldots, y_\nu$ par ι^{-1} est dans A, et $\gamma^2 = \mu[\iota]$. Donc γ^2 est encore dans $A'' = A'$, et, si $p > 2$, $A' = A'' + A''\gamma$.

Ainsi, pour n pair, $A' = \Sigma_0^{\pi-2} A\gamma^h$, $A\gamma^h$ *étant le complexe des substitutions qui multiplient a par* ι^h.

Si $n = 2\nu + 1$, on peut supposer que $\psi = cx^2$ (a sera dite de la *première classe* ou du premier type si c est carré, de la *seconde classe* ou du *second type* si c est non carré). Écrivons $a_c = \varphi + cx^2$. Si $p \neq 2$, a_c est équivalente à a_1 ou à a_N qui ne sont pas équivalentes (*E.*, 44). Mais le changement de variables $y_i = Ny'_i$ ($i = 1, \ldots, \nu$) transforme évidemment le groupe propre et le groupe total de a_1 en ceux de a_N. On peut donc laisser c indéterminé. Pour $p \neq 2$, aucune substitution α ne peut multiplier a par ι^h si h est impair, car $|\alpha a \alpha| = |a||\alpha|^2$ (*cf.* **1**) devrait être égal à $|a|\iota^{nh}$. Mais la substitution γ qui multiplie chaque variable par ι multiplie a par ι^2.

Ainsi, pour n impair, si $p \neq 2$, $A' = A'' = AI = \Sigma_0^{\frac{\pi-3}{2}} A\gamma^h$; *si* $p = 2$, $A' = A'' = AI = \Sigma_0^{\pi-2} A\gamma^h$; *dans les deux cas* $A\gamma^h$ *est formé des substitutions qui multiplient a par* ι^{2h}.

Par définition $\mathfrak{A}' = A'|I$, et $\mathfrak{A} = AI|I = A''|I = A|D$. Donc $\mathfrak{A}'|\mathfrak{A} = A'|AI$. Si donc $p > 2$ et $n = 2\nu'$, $(\mathfrak{A}', \mathfrak{A}) = 2$. Si $p > 2$ et $n = 2\nu + 1$, $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}$. Si $p = 2$, $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A} = A$.

L'étude de A^0 et de $\mathfrak{A}^0$ sera faite plus loin (**32**).

Pour préciser, lorsque cela sera utile, le groupe de la forme $a = \varphi + \psi$, ψ *étant irréductible ou nulle pour n pair*, je remplacerai les lettres A, $\mathfrak{A}$ par Q, $\mathfrak{Q}$, et j'ajouterai au besoin à Q ou $\mathfrak{Q}$ l'indice inférieur 0, 1 ou 2 selon que ψ dépendra de 0, 1 ou 2 variables; le groupe de ψ sera désigné par Ψ ($\Psi = 1$ si $\psi = 0$), et le p. g. c. d. de Ψ, A^0 par Ψ^0. Enfin, dans le cas où ψ est irréductible, je remplacerai les lettres A, $\mathfrak{A}$, Q, $\mathfrak{Q}$, Ψ par $\bar{A}$, $\bar{\mathfrak{A}}$, $\bar{Q}$, $\bar{\mathfrak{Q}}$, $\bar{\Psi}$ lorsqu'il sera utile de préciser que les variables choisies sont $x_1, y_1, \ldots, x_\nu, y_\nu$. Mais quand aucune confu-

sion n'est à craindre, j'identifierai les groupes et les substitutions des variables $x_1, y_1, \ldots, x_\nu, y_\nu, x, y$ avec leur action sur $x_1, y_1, \ldots, x_{\nu'}, y_{\nu'}$, cette action étant dite leur *forme imaginaire*, et leur action sur $x_1, y_1, \ldots, x_\nu, y_\nu, x, y$ leur *forme réelle*.

23. *Si* $n = 1$ *et si* $a = x^2$, $A = Q = Q_1$ se réduit évidemment à D.

Si $n = 2$, on peut supposer que $a = x_1 y_1$ (en faisant $\nu = 1$) ou que $a = \psi$, ψ étant irréductible (alors $\nu = 0$).

Si $a = x_1 y_1$ (*avec* $\nu = \nu' = 1$), on voit directement que $A = Q = Q_0$ *dérive des substitutions* $m_{1\iota} = |\iota x_1, \iota^{-1} y_1|$, $t_1 = |y_1, x_1|$ (*l'ordre des variables étant* x_1, y_1) *et est diédral d'ordre* $2(\pi - 1)$. A' *est défini par les équations de* A *jointes à* $\gamma^{\pi-1} = 1$, $\gamma m_{1\iota} = m_{1\iota}\gamma$, $\gamma^{-1} t_1 \gamma = t_1 m_{1\iota}$, *ou par les équations du produit direct* $\{m_{1\iota}\}\{\gamma\}$ *jointes à* $t_1^2 = 1$, $t_1 m_{1\iota} t_1 = m_{1\iota}^{-1}$, $t_1 \gamma t_1 = \gamma m_{1\iota}^{-1}$.

Si $a = \psi$, ψ *étant irréductible* (*donc* $\nu = 0$, $\nu' = 1$), en posant de même $m_{1\rho} = |\rho x^{-1}, \rho^{-1} y_1|$ ($m_{1\rho}$ n'a donc plus, pour ρ imaginaire, le même sens qu'au n° **2**), $t_1 = |y_1, x_1|$, le groupe $A(2, \pi^2)$ de $\psi = x_1 y_1$ *dans* $\mathfrak{S}'$ est donc $\{m_{1\rho}, t_1\}$. Pour qu'une substitution $m_{1\rho} t_1^\theta$ soit dans $\overline{A}(2, \pi)$, il faut et suffit que $\rho^{-1} = \dot{\rho}$, donc que $\rho^{\pi-2} = 1$. *Donc* $\overline{A}(2, \pi) = \overline{Q}(2, \pi) = \overline{Q_2}(2, \pi) = \{m_{1\sigma}, t_1\}$, σ *étant d'ordre* $\pi + 1$. $\overline{A}(2, \pi)$ *est diédral d'ordre* $2(\pi + 1)$. A' *est défini par les équations de* A *jointes à* $\gamma^{\pi-1} = m_{1,\xi^{\pi-1}}$, $\gamma m_{1\sigma} = m_{1\sigma}\gamma$, $\gamma^{-1} t_1 \gamma = t_1 m_{1,\xi^{1-\pi}}$, ξ *ayant le même sens qu'au n° 24, ou, en prenant* ξ *tel que* $\xi^{\pi-1} = \sigma$ (*en même temps que* $\xi^{\pi+1} = \iota$) *par* $\gamma^{\pi^2-1} = t_1^2 = 1$, $t_1 \gamma t_1 = \gamma^\pi$.

Passons aux variables x, y, et soit $s = s_0 + \upsilon s_1$ (s_0 et s_1 étant réels) une puissance de σ. La condition nécessaire $s^{\pi+1} = 1$ ou $s\dot{s} = 1$ équivaut à $\psi(s_0, -s_1) = 1$, et s vérifie l'équation $s^2 + b's + 1$, en posant $b' = \frac{b}{c} s_1 - 2 s_0$.

Supposons d'abord s *non réel et* $p > 2$. *Si l'ordre de* s *divise* $\frac{1}{2}(\pi + 1)$, s *est le carré d'une racine* ρ *de* $\rho^{\pi+1} = 1$, *et* $2 - b' = (\rho + \rho^\pi)^2$ *est carré dans* $\mathfrak{S}$. *Si inversement* $2 - b'$ *est un carré* β^2 *de* $\mathfrak{S}'$, *et si l'on pose* $s = \rho^2$, *on a* $\rho^2 \pm \beta\rho + 1 = 0$; *donc* ρ *est dans* $\mathfrak{S}'$ *hors de* $\mathfrak{S}$ (*sans quoi* s *serait réel*), *et* $\rho^{\pi+1} = 1$.

Si s est réel, $s = \pm 1$ ($s^{\pi+1} = s^{\pi-1} = 1$; alors $b' = \pm 2$), et, si $s = -1$ avec $p > 2$, son ordre 2 ne divise $\frac{1}{2}(\pi + 1)$ que pour $\pi \equiv 3$ mod 4.

L'action de m_{1s} sur x, y est

$$m_{1s} = m_{0s_0s_1} = \left| \begin{array}{lll} x & s_0 x + \frac{c'}{c} s_1 y & = X \\ y & -s_1 x + \left(s_0 - \frac{b}{c} s_1\right) y & = Y \end{array} \right|.$$

$m_0 s_0 s_1$ n'est une multiplication que si $s_1 = 0$, donc $s_0^2 = 1$; alors $m_{0s_0s_1} = |s_0 x, s_0 y|$, et j'écrirai aussi m_{0s_0} pour m_{0s_00}. Pour que, en dehors de ce cas, X ou Y soit monome, il faut, dans les deux hypothèses, que $c' s_1^2 = c_1$ c'est-à-dire que cc' soit carré. Pour que X et Y soient monomes sans que $m_{0s_0s_1}$ soit une multiplication, il faut et il suffit que $s_0 = b = 0$; mais alors, cc' étant carré, ψ n'est irréductible que si -1 est non carré.

En posant $\varkappa\dot{\varkappa}^{-1} = q$ ($q\dot{q} = 1$), l'action de $t_1 m_{1q}$ sur x, y est

$$t_0 = t_1 m_{1q} = \left| \begin{array}{ll} x & x + \frac{b}{c} y \\ y & -y \end{array} \right| \qquad (t_0^2 = 1).$$

Les générateurs $m_{0s_0s_1}$, t_0 de $A = Q = Q_2$ sont, comme il convient, indépendants de $\varkappa$, ce qui n'a pas lieu pour $t_1 = m_{1q} t_0$.

Tout e_2 de A hors de $\{m_{1\sigma}\}$ a la forme

$$t_0 m_{0s_0s_1} = \left| \begin{array}{ll} x & s_0 x + \frac{bs_0 - c' s_1}{c} y = X \\ y & -s_1 x - s_0 y = Y \end{array} \right| \qquad (E., 20).$$

qui ne peut se réduire à une multiplication que si $s_1 = 0$, donc $s_0^2 = 1$ et $b = 0$ (mais alors ψ n'est irréductible que si $-cc'$ est non carré). Pour que, en dehors de ce cas, X et Y soient monomes, il faut et suffit que $s_0 = 0$, donc que cc' soit carré. Si donc cc' est carré, on peut remplacer le générateur t_0 par $t_0 m_{1,-\nu g} = |g^{-1} y, gx| \left(g^2 = \frac{c}{c'}\right)$. Pour que, en dehors de ces cas, X ou Y soit monome, il faut et suffit que

$bs_0 = c's_1$, d'où $s_0^2 = 1$. La substitution

$$u_0 = t_0 m_{0,-1,-\frac{b}{c'}} = \begin{vmatrix} x & -x \\ y & y + \frac{b}{c'}x \end{vmatrix} \qquad (u_0^2 = 1)$$

est analogue à t_0, et $t_0 m_{0,1,\frac{b}{c'}} = u_0 m_{0,-1}$.

L'action de γ sur x, y est, en posant $\xi + \xi_0 + \upsilon\xi_1$ (ξ_0, ξ_1 réels),

$$\gamma = \begin{vmatrix} x & \xi_0 x + \frac{c'}{c}\xi_1 y \\ y & -\xi_1 x + \left(\xi_0 - \frac{b}{c}\xi_1\right) y \end{vmatrix}.$$

En prenant au besoin pour a une forme équivalente, on peut toujours supposer que $c' = c$ ($E.$, 45), d'où $\upsilon^{\pi+1} = 1$, et remplacer alors t_0 par $t'_0 = t_0 m_{1,-\upsilon} = t_1 m_{1,-\upsilon q} = |y, x|$. De même, en changeant au besoin de variables, on peut supposer que $\xi = \upsilon$, donc $c' = \iota c$, et remplacer alors γ par $\gamma' = m_{0,-1} t_0 \gamma = |\iota y, x|$.

Remarque. — *Supposons que* $a = \psi = bxy + cx^2 + c'y^2$, ψ *étant réductible dans* Ω *avec* $c \neq 0$, et définissons k, k', u, u', x_1, y_1 comme au n° **24**, puis s_0 et s_1 par $s = s_0 + us_1$, $s^{-1} = s_0 + u's_1$, en regardant s comme donné. On pourra conserver les définitions précédentes de $m_{0s_0s_1} = m_{1s}$, t_1, t_0, t'_0, u_0 et les formules de changements de variables (même celles qui donnent $c' = c$) en remplaçant partout $\varkappa$, $\dot{\varkappa}$, υ, $\dot{\upsilon}$, $\dot{q}$ par k, k', u, u', $q' = k'k^{-1}$, car s, s_0, s_1 et $\dot{q}$ n'ont été employés que comme vérifiant $s = s_0 + \upsilon s_1$, $s^{-1} = s_0 + \dot{\upsilon} s_1$, $\dot{q} = \dot{\varkappa}\varkappa^{-1}$.

Le cas où $a = \psi = xy$ coïncide, à un changement de notation près, avec celui où $a = x_1 y_1$. A dérive alors de $m_{0\iota} = |\iota x, \iota^{-1} y|$, $t_0 = |y, x|$.

26. Soit $n > 2$, et

$$\alpha = \begin{vmatrix} x_i & \Sigma_k(\alpha_{ik}x_k + \alpha'_{ik}y_k) = X_i \\ y_i & \Sigma_k(\beta_{ik}x_k + \beta'_{ik}y_k) = Y_i \end{vmatrix} \qquad (i, k = 1, \ldots, \nu, 0)$$

une substitution de A', en convenant de supprimer toutes les quantités

relatives à x ou à y si x ou y ne figure pas dans a. La considération des coefficients de $x_j y_k$, $x_j x_k$, $y_j y_k$, x_j^2, y_j^2 donne, en désignant par b_{jk}, c_j, c'_j les coefficients respectifs de $x_j y_k$, x_j^2, y_j^2 ($j, k \geqq 0$; $c_0 = c$, $b_0 = b$, $c'_0 = c'$) dans a les relations (*cf.* **1**)

$$(4)\quad \Sigma_{i=1}^{\nu}(\alpha_{ij}\beta'_{ik} + \beta_{ij}\alpha'_{ik}) + \alpha_{0j}(b\beta'_{0k} + 2c\alpha'_{0k}) + \beta_{0j}(b\alpha'_{0k} + 2c'\beta'_{0k}) = fb_{jk},$$

$$(5)\quad \Sigma_{i=1}^{\nu}(\alpha_{ij}\beta_{ik} + \beta_{ij}\alpha_{ik}) + \alpha_{0j}(b\beta_{0k} + 2c\alpha_{0k}) + \beta_{0j}(b\alpha_{0k} + 2c'\beta_{0k}) = 0 \quad (j \neq k),$$

$$(6)\quad \Sigma_{i=1}^{\nu}(\alpha'_{ij}\beta'_{ik} + \beta'_{ij}\alpha'_{ik}) + \alpha'_{0j}(b\beta'_{0k} + 2c\alpha'_{0k}) + \beta'_{0j}(b\alpha'_{0k} + 2c'\beta'_{0k}) = 0 \quad (j = k),$$

$$(7)\quad \Sigma_{i=1}^{\nu}\alpha_{ij}\beta_{ij} + \psi(\alpha_{0j}, \beta_{0j}) = fc_j,$$

$$(8)\quad \Sigma_{i=1}^{\nu}\alpha'_{ij}\beta'_{ij} + \psi(\alpha'_{0j}, \beta'_{0j}) = fc'_j,$$

où $j, k = 1, \ldots, \nu, 0$.

Pour $p = 2$ et $b = 1$, les équations (4), (5), (6) coïncident (à un changement près des indices) avec les équations (1), (2) du n° **17**. *Donc, pour* $p = 2$, $Q_0(2\nu, \pi)$ *et* $Q_2(2\nu + 2, \pi)$ *sont respectivement semblables à des diviseurs de* $G(2\nu, \pi)$ *et* $G(2\nu + 2, \pi)$. Je dirai que $Q_0(2\nu, \pi)$ et $Q_2(2\nu, \pi)$ sont respectivement, *pour* $p = 2$, le *premier groupe lévoquadratique* et le *second groupe lévoquadratique à* 2ν *variables*.

Soit

$$\alpha^{-1} = \begin{vmatrix} x_i & \Sigma_k(A_{ik}x_k + A'_{ik}y_k) = X'_i \\ y_i & \Sigma_k(B_{ik}x_k + B'_{ik}y_k) = Y'_i \end{vmatrix} \qquad (i, k = 1, \ldots, \nu, 0),$$

en convenant toujours de supprimer les quantités relatives à x ou à y si x ou y ne figure pas dans a.

Pour $p \neq 2$, on a $\alpha a \bar{\alpha} = fa$, d'où $f\alpha^{-1} = a\bar{\alpha}a^{-1} = 2a.\bar{\alpha}.(2a)^{-1}$, c'est-à-dire

$$(9)\quad fA_{ik} = \beta'_{ki}, \qquad fA'_{ik} = \alpha'_{ki}, \qquad fB_{ik} = \beta_{ki}, \qquad fB'_{ik} = \alpha_{ki} \qquad (i, k \neq 0).$$

Si $\psi = 0$, α^{-1} est explicitement déterminée par (9).

Si $\psi = c\lambda^2$, on a en outre

$$(10)\quad fA_{i0} = 2\alpha'_{0i}c, \qquad fB_{i0} = 2\alpha_{0i}c \quad (i = 1, \ldots, \nu),$$

$$(11)\quad 2cfA_{0k} = \beta_{k0}, \qquad 2cfA'_{0k} = \alpha_{k0} \quad (k = 1, \ldots, \nu), \qquad fA_{00} = \alpha_{00}.$$

Si $\delta \neq 0$, on a, avec (9),

$$(12)\quad \left\{\begin{array}{ll} fA_{i0} = \beta'_{0i}\, b + 2\alpha'_{0i}\, c, & fA'_{i0} = \alpha'_{0i}\, b + 2\beta'_{0i}\, c' \\ fB_{i0} = \beta_{0i}\, b + 2\alpha_{0i}\, c, & fB'_{i0} = \alpha_{0i}\, b + 2\beta_{0i}\, c' \\ \delta f A_{0k} = \beta'_{k0}\, b - 2\beta_{k0}\, c', & \delta f A'_{0k} = \alpha'_{k0}\, b - 2\alpha_{k0}\, c' \\ \delta f B_{0k} = \beta_{k0}\, b - 2\beta'_{k0}\, c, & \delta f B'_{0k} = \alpha_{k0}\, b - 2\alpha'_{k0}\, c \end{array}\right\} \quad (i,\ k \neq 0),$$

$$\left\{\begin{array}{ll} \delta f A_{00} = \beta'_{00}\, b^2 + 2\alpha'_{00}\, bc - 2\beta_{00}\, bc' - 4\alpha_{00}\, cc', & \delta f A'_{00} = \alpha'_{00}\, b^2 - 2(\alpha_{00} - \beta'_{00})\, bc' - 4\beta_{00}\, c'^2, \\ \delta f B_{00} = \beta_{00}\, b^2 + 2(\beta'_{00} - \alpha_{00})\, bc - 4\alpha'_{00}\, c^2, & \delta f B'_{00} = \alpha_{00}\, b^2 - 2\alpha'_{00}\, bc + 2\beta_{00}\, bc' - 4\beta'_{00}\, cc'. \end{array}\right.$$

Soit $p = 2$. — Comme les valeurs (9), (10), (12) des A_{ik}, A'_{ik}, B_{ik}, B'_{ik} vérifient $\alpha\alpha^{-1} = 1$ dans tout champ où ces valeurs ont un sens, et que chaque ligne de coefficients de α^{-1} est fournie par un système d'équations de déterminant $|\alpha|$ (système qui forme une partie de $\alpha\alpha^{-1} = 1$), elles conviennent encore au cas $p = 2$, et il reste seulement, si $\psi = cx^2$, à résoudre le système

$$(13)\quad \left\{\begin{array}{l} \Sigma_k (A_{0k}\alpha_{ki} + A'_{0k}\beta_{ki}) + A_{00}\alpha_{0i} = c_i, \\ \Sigma_k (A_{0k}\alpha'_{ki} + A'_{0k}\beta_{ki}) + A_{00}\alpha'_{0i} = 0 \end{array}\right.$$

relativement aux A_{0k}, A'_{0k}. Or remarquons que, pour $p = 2$, $\psi = cx^2$, (7) et (8) déterminent les α_{0k}, α'_{0k} où $k \neq 0$ et α_{00} par les autres coefficients, parmi lesquels les α_{i0}, β_{i0} ne figurent que dans celles des équations (4), (5) où $j = 0$ [(5) est ici symétrique en j et k; (4) disparaît pour $k = 0$, et (6) pour $k = 0$ ou $j = 0$].

On peut donc supposer que les α_{ik}, α'_{ik}, β_{ik}, β'_{ik}, où i et k sont $\neq 0$, ne sont assujettis qu'à celles des équations (4), (5), (6) où j et k sont $\neq 0$, c'est-à-dire que *leur matrice* M *est une matrice de* $G(2\nu, \pi)$, et α_{i0}, β_{i0} $(i \neq 0)$ qu'à celles des équations (4), (5) où $j = 0$; et comme la matrice de ces dernières équations est M de déterminant 1, $\alpha_{i0} = \beta_{i0} = 0$ [d'ailleurs A_{i0} et B_{i0} $(i \neq 0)$ étant nuls d'après (10), il en est de même *a priori* de α_{i0}, β_{i0} $(i \neq 0)$]. Donc, d'après (7), $\alpha_{00} = 1$. Donc, la première équation (13) donne, pour $i = 0$, $A_{00} = 1$ (cela résulte aussi *a priori* de $\alpha_{00} = 1$). Omettons, dans (13), les équations relatives à $i = 0$, remplaçons A_{00} par 1, multiplions la première et la seconde équation une première fois par β'_{li} et β_{li} respectivement, une seconde fois par α'_{li} et α_{li}, et sommons chaque fois en i. On aura, d'après les équations (3) et (4) du n° **17**,

$$(14)\qquad fA_{0k} = \Sigma_i (\alpha_{0i}\beta_{ki} + \beta_{ki}\alpha'_{0i}), \qquad fA'_{0k} = \Sigma_i (\alpha_{0i}\alpha'_{ki} + \alpha_{ki}\alpha'_{0i}).$$

Mais comme $\alpha_{i0} = \beta_{i0} = 0$ $(i \neq 0)$ et que α_{0k}, α'_{0k} sont déterminés par M, on voit que, *pour* $p = 2$, $Q(2\nu + 1, \pi)$ *est isomorphe à son action sur* $x_1, y_1, \ldots, x_\nu, y_\nu$ *qui est* $G(2\nu, \pi)$. *On peut donc omettre les groupes* $A(2\nu + 1, \pi)$ *pour* $p = 2$.

Représentons par $Bxy + Cx^2 + C'y^2 = \Psi(x, y)$ (¹) la forme 0 si $\psi = 0$ $(p \geqq 2)$, la forme $\frac{x^2}{4c}$ si $\psi = cx^2$ $(p > 2)$, la forme $-\delta^{-1}\psi(y, -x)$ si $\delta \neq 0$ $(p \geqq 2)$, et par B_{jk}, C_j, C'_j les coefficients de $x_j y_k$, x_j^2, y_j^2 dans $\varphi + \Psi$. Les conditions (4)-(8), écrites pour α^{-1} (qui multiplie a par f^{-1}), donnent alors (²), *en supposant* $p \neq 2$ *si* $\psi = cx^2$, les relations, *a priori* équivalentes,

$$(15)\quad \Sigma_{i=1}^{\nu}(\alpha_{ki}\beta'_{ji} + \beta_{ji}\alpha'_{ki}) + \alpha_{k0}(B\beta'_{j0} + 2C\beta_{j0}) + (B\beta_{j0} + 2C'\beta'_{j0})\alpha'_{k0} = fB_{kj},$$

$$(16)\quad \Sigma_{i=1}^{\nu}(\alpha_{ki}\alpha'_{ji} + \alpha_{ji}\alpha'_{ki}) + \alpha_{k0}(B\alpha'_{j0} + 2C\alpha_{j0}) + (B\alpha_{j0} + 2C'\alpha'_{j0})\alpha'_{k0} = 0 \quad (j \neq k),$$

$$(17)\quad \Sigma_{i=1}^{\nu}(\beta_{ki}\beta'_{ji} + \beta_{ji}\beta'_{ki}) + \beta_{k0}(B\beta'_{j0} + 2C\beta_{j0}) + (B\beta_{j0} + 2C'\beta'_{j0})\beta'_{k0} = 0 \quad (j \neq k),$$

$$(18)\quad \Sigma_{i=1}^{\nu}\alpha_{ji}\alpha'_{ji} + \Psi(\alpha_{j0}, \alpha'_{j0}) = fC_j,$$

$$(19)\quad \Sigma_{i=1}^{\nu}\beta_{ji}\beta'_{ji} + \Psi(\beta_{j0}, \beta'_{j0}) = fC'_j.$$

En comparant (15)-(19) à (4)-(8), on voit que, si $\Psi = \psi$, A et A′ contiennent la transposée de chacune de leurs substitutions. La condition $\Psi = \psi$ est toujours remplie si $\psi = 0$ ou si $\pi = 2$. Si $\delta \neq 0$, elle équivaut à $\delta = 1$, $c' = -c$, et pour $p = 2$, on peut toujours la supposer remplie (*E.*, 45).

(¹) On ne confondra pas la forme Ψ avec le groupe Ψ de ψ.

(²) En désignant les premiers membres de (15), (16), (17), (18), (19) respectivement par w_{kj}, $u_{kj}(= u_{jk})$, $v_{kj}(= v_{jk})$, u_j, v_j, on obtient d'abord directement

$$w_{kj} = u_{kj} = v_{kj} = 0 \qquad (j, k \neq 0),$$

$$\begin{cases} bw_{0k} + 2c'v_{k0} = 0 \\ 2cw_{0k} + bv_{k0} = 0 \end{cases} \quad (k \neq 0), \qquad \begin{cases} bw_{k0} + 2cu_{k0} = 0 \\ 2c'w_{k0} + bu_{k0} = 0 \end{cases} \quad (k \neq 0),$$

$$\begin{cases} (4cc' + b^2)w_{00} + 4bcu_0 + 4bc'v_0 = b, \\ 2bcw_{00} + 4c^2u_0 + b^2v_0 = c, \\ 2bc'w_{00} + b^2u_0 + 4c'^2v_0 = c'. \end{cases}$$

d'où $w_{0k} = w_{k0} = u_{k0} = v_{k0} = 0$ $(k \neq 0)$, $w_{00} = B$, $u_0 = C$, $v_0 = C'$ (le déterminant du dernier système est $-\delta^3$).

27. Désignons par $(4)_l$, $(7)_l$, $(8)_l$, $(15)_l$, $(18)_l$, $(19)_l$ ce que deviennent les équations (4), (7), (8), (15), (18), (19) respectivement quand on y fait $j = k = l$.

A contient une substitution α dont les colonnes répondant à x_l, y_l forment une solution donnée de $(7)_l$, $(4)_l$, $(8)_l$ pour $f = 1$.

On démontre ce théorème comme le théorème analogue du n° 4, $F(x_l, y_l)$ étant ici la forme $x_l y_l$, si $l \neq 0$, et la forme ψ si $l = 0$ [1] : a_l est encore équivalent à $a - F(x_l, y_l)$, car sans cela les deux équations $a = 0$ et $F(x_l, y_l) + a_l = 0$, dont les premiers membres sont équivalents, n'auraient pas, pour chaque système de valeurs de x_l, y_l le même nombre de solutions dans les autres variables.

Comme au n° 4, les substitutions α de cette sorte forment le complexe $A_l \alpha_0$, α_0 étant l'une d'elles, et A_l le groupe de $a - F(x_l, y_l)$.

De même les substitutions de A dont les lignes répondant à x_l, y_l constituent une solution donnée de $(18)_l$, $(15)_l$, $(19)_l$ pour $f = 1$ forment le complexe $\alpha_0 A_l$, α_0, étant l'une d'elles, qui existe toujours.

Or pour $n > 1$ et $l = 1$, le nombre des solutions autres que $0, 0, \ldots, 0$, de $(7)_1$ est $\pi^{2\nu} - 1$ pour $n = 2\nu + 1$ ($\psi = cx^2$, $p \neq 2$) et $(\pi^{\nu'} - \theta)(\pi^{\nu'-1} + \theta)$ pour $n = 2\nu'$ ($\theta = 1$ si $\psi = 0$ ou si ψ est réductible; $\theta = -1$ si ψ est irréductible; si donc p est $\neq 2$, θ est le caractère quadratique de δ) (*E.*, 44, 45). Il s'agit alors de calculer le nombre m_2 des solutions de $(4)_1$, $(8)_1$ répondant à une solution autre que $0, 0, \ldots, 0$ de $(7)_1$ [à la solution $0, 0, \ldots, 0$ de $(7)_1$ ne répond aucune

---

[1] Si $l = 0$ et $\delta \neq 0$, $a' = \tau a \bar{\tau}$ a, d'après la construction de τ, la forme

$$\psi + xX + yY + Z,$$

X, Y et Z ne dépendant pas de x, y. On identifie cette forme avec

$$\psi(x + u, y + v) + a_l$$

en déterminant u, v par $2cu + bv = X$, $bu + 2c'v = Y$.

solution de $(4)_1$, $(8)_1$]. Or, on voit comme au n° 4 que m_Σ est indépendant de Σ. En prenant pour Σ la solution $1, 0, \ldots, 0$, $(4)_1$ donne $\beta'_{11} = 1$; on peut alors prendre arbitrairement les α'_{i1}, β'_{i1} où i est $\neq 1$, α'_{11} étant alors déterminé par $(8)_1$. Donc $m_\Sigma = \pi^{n-2}$. *Donc l'ordre de* $A(n, \pi)$, *qui est* 2 *pour* $n = 1$, *et* $2(\pi - \theta)$ *pour* $n = 2$ (**25**), *est* $2\pi^{\nu^2}\Pi_1^\nu(\pi^{2i} - 1)$ *pour* $n = 2\nu + 1$ $(p > 2)$, *et* $2\pi^{\nu'(\nu'-1)}(\pi^{\nu'} - \theta)\,\Pi_1^{\nu'-1}(\pi^{2i} - 1)$ *pour* $n = 2\nu' > 2$ $(p \geqq 2)$.

Si $p > 2$, on peut réduire $a = (a_{ik})$ à $\Sigma_1^{n-1} x_i^2 + cx^2$ ($c = 1$ ou N). Pour que $\alpha = (\alpha_{ik})$ soit dans A′, il faut et suffit que

$$\Sigma_{i=1}^{n-1} \alpha_{ij}\alpha_{ik} + c\alpha_{nj}\alpha_{nk} = fa_{jk}.$$

La condition analogue relative à α^{-1} est, en posant $a^{-1} = (a'_{ik})$,

$$\Sigma_{i=1}^{n-1} \alpha_{ji}\alpha_{ki} + c^{-1}\alpha_{jn}\alpha_{kn} = fa'_{jk}.$$

On voit de même que les substitutions de A *dont la première colonne (ligne) est une solution donnée de*

$$\Sigma_1^{n-1} \alpha_{i1}^2 + c\alpha_{n1}^2 = 1 \qquad (\Sigma_1^{n-1} \alpha_{1i}^2 + c^{-1}\alpha_{1n}^2 = 1)$$

forment le complexe $A_1\alpha_0(\alpha_0 A_1)$, α_0 *étant l'une d'elles, qui existe toujours, et* A_1 *le groupe de* $a - x_1^2$. On déduit plus simplement de là l'ordre de A.

28. A (n, π) contient évidemment, outre les générateurs réels déjà indiqués (**25**) de Ψ (t_0 désignera $|x, -x|$, si $\psi = cx^2$, et $|y, -y|$, si $\psi = c'y^2$) les substitutions

$$t_i = \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ y_i & x_i \end{vmatrix}, \qquad m_{i\lambda} = \begin{vmatrix} x_i & \lambda x_i \\ y_i & \lambda^{-1} y_i \end{vmatrix}, \qquad V_{ik\lambda} = \begin{vmatrix} x_i & x_i + \lambda x_k \\ y_k & y_k - \lambda y_i \end{vmatrix},$$

$$V_{0k\lambda} = \begin{cases} \begin{vmatrix} x & x + \lambda x_k \\ y_k & y_k - b\lambda y - 2c\lambda x - c\lambda^2 x_k \end{vmatrix} & \text{si } \psi \text{ dépend de } x, \\ 1 \quad \text{si } \psi \text{ ne dépend pas de } x, \end{cases}$$

$$V_{k0\lambda} = \begin{cases} \begin{vmatrix} y & y - \lambda y_k \\ x_k & x_k + b\lambda x + 2c'\lambda y - c'\lambda^2 y_k \end{vmatrix} & \text{si } \psi \text{ dépend de } y, \\ 1 \quad \text{si } \psi \text{ ne dépend pas de } y \end{cases}$$

($i, k \neq 0$; α réel; les variables non écrites sont inaltérées) et leurs combinaisons

$$t_{jj'} = t_{j'j} = t_j t_{j'} \quad (j \neq j';\ j, j' = 0, \ldots, \nu), \qquad d_{ik} = m_{i,-1} m_{k,-1},$$

$$U_{ik\lambda} = U_{ki,-\lambda} = t_k V_{ik\lambda} t_k = \begin{vmatrix} x_i & x_i + \lambda y_k \\ x_k & x_k - \lambda y_i \end{vmatrix},$$

$$W_{ik\lambda} = W_{ki,-\lambda} = t_i V_{ik\lambda} t_i = \begin{vmatrix} y_i & y_i + \lambda x_k \\ y_k & y_k - \lambda x_i \end{vmatrix} \quad (^1),$$

$$U_{0k\lambda} = U_{k0,-\lambda} = t_k V_{0k\lambda} t_k = \begin{cases} \begin{vmatrix} x & x + \lambda y_k \\ x_k & x_k - b\lambda y - 2c\lambda x - c\lambda^2 y_k \end{vmatrix} & \text{si } \psi \text{ dépend de } x, \\ 1 \quad \text{si } \psi \text{ ne dépend pas de } x, \end{cases}$$

$$W_{0k\lambda} = W_{k0,-\lambda} = t_k V_{k0,-\lambda} t_k = \begin{cases} \begin{vmatrix} y & y + \lambda x_k \\ y_k & y_k - b\lambda x - 2c'\lambda y - c'\lambda^2 x_k \end{vmatrix} & \text{si } \psi \text{ dépend de } y, \\ 1 \quad \text{si } \psi \text{ ne dépend pas de } y, \end{cases}$$

$$R_{ik\lambda} = R_{ki,-\lambda^{-1}} = R_{ik,-\lambda} d_{ik} = V_{ik\lambda} V_{ki,-\lambda^{-1}} V_{ik\lambda} = \begin{vmatrix} x_i & \lambda x_k \\ y_i & \lambda^{-1} y_k \\ x_k & -\lambda^{-1} x_i \\ y_k & -\lambda y_i \end{vmatrix} \quad (i, k \neq 0),$$

$$\begin{aligned} S_{ik\lambda} = S_{ki,-\lambda} &= t_k R_{ik\lambda} t_k = t_i R_{ik,\lambda^{-1}} t_i \\ &= U_{ik\lambda} W_{ik,\lambda^{-1}} U_{ik\lambda} = W_{ik,\lambda^{-1}} U_{ik\lambda} W_{ik,\lambda^{-1}} = \end{aligned} \begin{vmatrix} x_i & \lambda y_k \\ y_i & \lambda^{-1} x_k \\ x_k & -\lambda y_i \\ y_k & -\lambda^{-1} x_i \end{vmatrix} \quad (i, k \neq 0).$$

$$\begin{aligned} T_{ik} &= m_{k\lambda}^{-1} m_{i,-\lambda} R_{ik\lambda} = R_{ik\lambda} m_{i\lambda}^{-1} m_{k,-\lambda} \\ &= t_{ik} m_{k\lambda} m_{i,-\lambda} S_{ik\lambda} = S_{ik\lambda} m_{i\lambda}^{-1} m_{k,-\lambda}^{-1} t_{ik} = \end{aligned} \begin{vmatrix} x_i & x_k \\ y_i & y_k \\ x_k & x_i \\ y_k & y_i \end{vmatrix} \quad (i, k \neq 0).$$

---

(1) Les définitions précédentes, celles qui vont suivre et leurs conséquences gardent évidemment leur valeur si λ est hors de Θ. Elles sont alors relatives à un groupe $\Lambda(n, \pi^i)$ où i est > 1. On voit que, si ρ dans Θ, $m_{i\rho}$, $V_{ik\rho}$, $U_{ik\rho}$, $W_{ik\rho}$ coïncident respectivement avec les substitutions $\overline{m}_{i\rho}$, $V'_{ik\rho}$, $U'_{ik\rho}$, $W'_{ik\rho}$ du n° 9. Cela n'a plus lieu si ρ est hors de Θ.

Il sera parfois commode de négliger le dernier indice dans les substitutions m, V, U, W, et les deux derniers dans $m_{0s_0s_1}$.

Il résulte des formules précédentes que t_{ik}, *pour* i *et* $k \neq 0$, *transforme* $V_{ik\lambda}$ *en* $V_{ki-\lambda}$, *et* $U_{ik\lambda}$ *en* $W_{ik\lambda}$. De même, en posant $\tau = \begin{vmatrix} x & y \\ y & x \end{vmatrix}$, et en écrivant $t_0^{(c)}$, $u_0^{(c)}$, $V_{0k\lambda}^{(c)}$, $V_{k0\lambda}^{(c)}$, $U_{0k\lambda}^{(c)}$, $W_{0k\lambda}^{(c)}$ pour t_0, u_0, $V_{0k\lambda}$, $V_{k0\lambda}$, $U_{0k\lambda}$, $W_{0k\lambda}$ afin de mettre en évidence le paramètre c ou c' dont dépendent les substitutions, la $s_2\,\tau t_k$ (qui transforme ψ en $\psi' = bxy + c'x^2 + cy^2$, donc Ψ en Ψ', Ψ' étant le groupe de ψ') transforme $t_0^{(\gamma)}$ en $u_0^{(\gamma)}$, $V_{0k\lambda}^{(\gamma)}$ en $V_{k0,-\lambda}^{(\gamma)}$ et $U_{0k\lambda}^{(\gamma)}$ en $W_{0k\lambda}^{(\gamma)}$. Cette remarque permet de déduire de chaque relation entre les V, U, W une nouvelle relation analogue.

29. Les substitutions ainsi définies vérifient, outre les équations de Ψ (**25**), les relations suivantes [1] :

$$(20)\quad \begin{cases} t_j^2 = V_{jj'\lambda}^p = 1, & V_{jj'\lambda}^{-1} = V_{jj',-\lambda} \quad (j, j' = 0, \ldots, \nu). \\ R_{ik\lambda}^2 = S_{ik\lambda}^2 = d_{ik}, & R_{ik\lambda}^4 = S_{ik\lambda}^4 = 1 \quad (i, k = 1, \ldots, \nu); \end{cases}$$

$$(21)\quad \begin{cases} \left.\begin{array}{ll} t_i m_{ik\lambda} t_i = m_{ik\lambda}^{-1}, & t_0 m_{0s_0s_1} t_0 = m_{0s_0s_1}^{-1} \\ t_{ik} V_{ik\lambda} t_{ik} = V_{ki,-\lambda}, & t_{ik} U_{ik\lambda} t_{ik} = W_{ik\lambda} \end{array}\right\} \quad (i, k \neq 0); \\ \left.\begin{array}{ll} m_{i\mu}^{-1} V_{ij\lambda} m_{i\mu} = W_{ij,\lambda\mu}, & m_{k\mu}^{-1} V_{jk\lambda} m_{k\mu} = V_{jk,\frac{\lambda}{\mu}} \\ m_{i\mu}^{-1} W_{ij\lambda} m_{i\mu} = W_{ij,\frac{\lambda}{\mu}}, & m_{k\mu}^{-1} U_{jk\lambda} m_{k\mu} = U_{jk,\lambda\mu} \end{array}\right\} \quad (j \leqq 0); \\ \text{si } \psi = cx^2, \quad t_0 V_{0k\lambda} t_0 = V_{0k,-\lambda}; \quad \text{si } \psi = c'y^2, \quad t_0 V_{k0\lambda} t_0 = V_{k0,-\lambda}; \\ \text{si } \delta \neq 0, \quad t_0 V_{0k\lambda} t_0 = V_{0k\lambda}. \quad t_0 V_{k0\lambda} t_0 = V_{k0\lambda} U_{k0,-\frac{b\lambda}{c}}, \\ \left.\begin{array}{l} m_{0s_0s_1}^{-1} V_{0k\lambda} m_{0s_0s_1} = V_{0k,\lambda s_0} W_{0k,-\lambda s_1} \\ m_{0s_0s_1}^{-1} V_{k0\lambda} m_{0s_0s_1} = V_{k0,\left(s_0 - \frac{b}{c} s_1\right)\lambda} U_{k0,\frac{c'}{c} s_1 \lambda} \end{array}\right\} \quad [\psi(s_0, -s_1) = c]; \\ (\text{si } c' = c, \ t_0' V_{0k\lambda} t_0' = W_{0k\lambda}, \ t_0' V_{k0\lambda} t_0' = U_{k0\lambda}); \end{cases}$$

---

[1] Les formules (23), (25), (27) se tirent respectivement des formules (22), (24), (26) en transformant ces dernières par des t; (28) résulte de (22) et (23); la seconde et la quatrième des relations (24) sont les transformées de la première et de la troisième par τt_{ik} : la dernière des relations (26) est la transformée de la précédente par τt_k.

$$(22)\quad \left\{\begin{array}{c} V_{ik\lambda}V_{il\mu}=V_{il\mu}V_{ik\lambda} \qquad (k\neq l \text{ ou } k=l) \\ V_{kl\lambda}^{-1}V_{ik\mu}V_{kl\lambda}=V_{ik\mu}V_{il,-\lambda\mu} \\ V_{ik\lambda}^{-1}V_{ki\mu}V_{ik\lambda}=V^{-1}_{ki,\frac{\varphi}{\lambda^2\mu}}m_{k,-\lambda^2\mu}m^{-1}_{i,\lambda^2\mu}T_{ik}V^{-1}_{ki,\frac{\varphi'}{\lambda^2\mu}} \quad (^1) \\ (\varphi=1+\lambda\mu,\ \varphi'=1-\lambda\mu) \end{array}\right\} \quad (i,k,l\neq 0);$$

$$(23)\quad \left\{\begin{array}{c} V_{kl\lambda}V_{li\mu}=V_{li\mu}V_{kl\lambda}, \\ V_{ik\lambda}U_{il\mu}=U_{il\mu}V_{ik\lambda}, \qquad V_{kl\lambda}W_{li\mu}=W_{li\mu}V_{kl\lambda} \\ U_{ik\lambda}U_{il\mu}=U_{il\mu}U_{ik\lambda}, \qquad W_{ik\lambda}W_{il\mu}=W_{il\mu}W_{ik\lambda} \\ \text{(dans ces cinq formules, } k \text{ peut être égal à } l) \\ U_{kl\lambda}^{-1}V_{ik\mu}U_{kl\lambda}=V_{ik\mu}U_{il,-\lambda\mu} \\ W_{kl\lambda}^{-1}U_{ik\mu}W_{kl\lambda}=U_{ik\mu}V_{il,-\lambda\mu} \\ V_{kl\lambda}^{-1}W_{ik\mu}V_{kl\lambda}=W_{ik\mu}W_{il,-\lambda\mu} \end{array}\right\} \quad (i,k,l\neq 0);$$

$$(24)\quad \left\{\begin{array}{c} V_{0k\lambda}V_{ik\mu}=V_{ik\mu}V_{0k\lambda}, \qquad V_{k0\lambda}V_{ki\mu}=V_{ki\mu}V_{k0\lambda} \\ V_{ki\mu}^{-1}V_{0k\lambda}V_{ki\mu}=W_{ik,c\lambda^2\mu}V_{0i,-\lambda\mu}V_{0k\lambda} \\ V_{ik\mu}^{-1}V_{k0\lambda}V_{ik\mu}=U_{ik,c'\lambda^2\mu}V_{i0,\lambda\mu}V_{k0\lambda} \end{array}\right\} \quad (i,k\neq 0);$$

$$(25)\quad \left\{\begin{array}{c} U_{0k\lambda}U_{ik\mu}=U_{ik\mu}U_{0k\lambda}, \qquad W_{k0\lambda}W_{ki\mu}=W_{ki\mu}W_{k0\lambda} \\ U_{0k\lambda}V_{ki\mu}=V_{ki\mu}U_{0k\lambda}, \qquad W_{k0\lambda}V_{ik\mu}=V_{ik\mu}W_{k0\lambda} \\ V_{0k\lambda}W_{ik\mu}=W_{ik\mu}V_{0k\lambda}, \qquad V_{k0\lambda}U_{ki\mu}=U_{ki\mu}V_{k0\lambda} \\ W_{ki\mu}^{-1}U_{0k\lambda}W_{ki\mu}=V_{ki,-c\lambda^2\mu}V_{0i,-\lambda\mu}U_{0k\lambda} \\ V_{ik\mu}^{-1}U_{0k\lambda}V_{ik\mu}=U_{ik,-c\lambda^2\mu}U_{0i,\lambda\mu}U_{0k\lambda} \\ U_{ik\mu}^{-1}V_{0k\lambda}U_{ik\mu}=V_{ik,-c\lambda^2\mu}U_{0i,\lambda\mu}V_{0k\lambda} \\ U_{ik\mu}^{-1}W_{k0\lambda}U_{ik\mu}=V_{ik,-c'\lambda^2\mu}V_{i0,\lambda\mu}W_{k0\lambda} \\ V_{ki\mu}^{-1}W_{k0\lambda}V_{ki\mu}=W_{ik,c'\lambda^2\mu}W_{0i,\lambda\mu}W_{k0\lambda} \\ W_{ik\mu}^{-1}V_{k0\lambda}W_{ik\mu}=V_{ki,c'\lambda^2\mu}W_{i0,\lambda\mu}V_{k0\lambda} \end{array}\right\} \quad (i,k\neq 0);$$

---

(1) En remplaçant $m_{k,-\lambda^2\mu}m^{-1}_{i,\lambda^2\mu}T_{ik}$ par $R_{ki,\lambda^{-2}\mu^{-1}}$, on réduit le second membre à $V^{-1}_{ki,\lambda^{-1}}V_{ik,-\lambda^2\mu}V_{ki,\lambda^{-1}}$, c'est-à-dire que $V^{-1}_{ik\lambda}V_{ki\mu}V_{ik\lambda}$ ne change pas quand on remplace respectivement i, k, λ, μ par k, i, λ^{-1}, $-\lambda^2\mu$, ce qui échange φ et φ'.

Si $\varphi\neq 0$, on a encore la formule

$$V^{-1}_{ik\lambda}V_{ki\mu}V_{ik\lambda}=V_{ik,-\frac{\lambda^2\mu}{\varphi}}V_{ki,\mu\varphi}m^{-1}_{k\varphi}m_{i\varphi},$$

d'où, par les changements précédents, si $\varphi'\neq 0$,

$$V^{-1}_{ik\lambda}V_{ki\mu}V_{ik\lambda}=V_{ki,\frac{\mu}{\varphi}}V_{ik,\lambda^2\mu\varphi'}m^{-1}_{i\varphi'}m_{k\varphi'}.$$

$$
(26)\quad \left\{
\begin{array}{l}
V_{k0\lambda}\,U_{k0\mu} = U_{k0\mu}\,V_{k0\lambda}, \\
V^{-1}_{0l\mu}\,V_{k0\lambda}\,V_{0l\mu} = V_{kl,\,b\lambda\mu}\,V_{k0\lambda}, \qquad V^{-1}_{l0\mu}\,V_{k0\lambda}\,V_{l0\mu} = U_{kl,2c\lambda\mu}\,V_{k0\lambda}, \\
V_{0l\mu}\,U_{0k\lambda}\,V_{0l\mu} = V_{kl,2c\lambda\mu}\,U_{0k\lambda}, \\
V^{-1}_{0k\lambda}\,V_{k0\mu}\,V_{0k\lambda} = m_{0s_0s_1}\,m_{k\varphi}\,U_{0k,-c\lambda\mu^2}\,V_{k0,\frac{\mu(1-b\lambda\mu)}{\varphi^2}}\,W_{k0,\frac{c\lambda^2\mu}{\varphi}}\,V_{0k,\frac{\lambda\mu^2(cc'\lambda\mu-b)}{\varphi}}, \\
s_0 = \dfrac{1-cc'\lambda^2\mu^2}{\varphi}, \qquad s_1 = \dfrac{c\lambda\mu(2-b\lambda\mu)}{\varphi} \qquad [\psi(s_0,-s_1)=c], \\
\varphi = 1 - b\lambda\mu + cc'\lambda^2\mu^2 \qquad (\delta \neq 0); \\
V^{-1}_{0k\lambda}\,U_{0k\mu}\,V_{0k\lambda} = \begin{cases} U_{0k,\frac{\mu}{\varphi}}\,V_{0k,c\lambda^2\mu\varphi}\,m_{k\varphi^2} & \text{si } \varphi = 1 + c\lambda\mu \text{ est } \neq 0 \quad (^1), \\ U_{0k,\frac{2}{c\lambda}}\,m_{k,-c\lambda^2}\,m^{\varepsilon}_{0,-1}\,t_{0k} & \text{si } \varphi = 0 \end{cases} \\
\qquad (\varepsilon = 1 \text{ si } \psi \text{ dépend de } y;\ \varepsilon = 0 \text{ si } \psi = cx^2); \\
V_{k0\lambda}\,W_{0k\mu}\,V^{-1}_{k0\lambda} = \begin{cases} W_{0k,\frac{\mu}{\varphi'}}\,V_{k0,-c'\lambda^2\mu\varphi'}\,m^{-1}_{k\varphi'^2} & \text{si } \varphi' = 1 + c'\lambda\mu \text{ est } \neq 0, \\ W_{0k,\frac{2}{c'\lambda}}\,m^{-1}_{k,-c'\lambda^2}\,m^{\varepsilon}_{0,-1}\,u_0\,t_k & \text{si } \varphi' = 0 \end{cases} \\
\qquad (\varepsilon = 1 \text{ si } \psi \text{ dépend de } x;\ \varepsilon = 0 \text{ si } \psi = c'y^2);
\end{array}
\right.
$$

$$
(27)\quad \left\{
\begin{array}{ll}
\multicolumn{2}{c}{V_{0k\lambda}\,W_{0k\mu} = W_{0k\mu}\,V_{0k\lambda},} \\
V^{-1}_{0l\mu}\,W_{k0\lambda}\,V_{0l\mu} = W_{lk,b\lambda\mu}\,W_{k0\lambda}, & V_{0l\mu}\,V_{0k\lambda}\,V_{0l\mu} = W_{kl,2c\lambda\mu}\,V_{0k\lambda}, \\
U^{-1}_{0l\mu}\,V_{k0\lambda}\,U_{0l\mu} = U_{lk,b\lambda\mu}\,V_{k0\lambda}, & U^{-1}_{0l\mu}\,U_{0k\lambda}\,U_{0l\mu} = U_{kl,2c\lambda\mu}\,U_{0k\lambda}, \\
V^{-1}_{l0\mu}\,W_{k0\lambda}\,V_{l0\mu} = V_{lk,-2c'\lambda\mu}\,W_{k0\lambda}, & W^{-1}_{l0\mu}\,V_{k0\lambda}\,W_{l0\mu} = V_{kl,2c'\lambda\mu}\,V_{k0\lambda}, \\
U^{-1}_{0l\mu}\,W_{k0\lambda}\,U_{0l\mu} = V_{lk,b\lambda\mu}\,W_{k0\lambda}, & W^{-1}_{l0\mu}\,W_{k0\lambda}\,W_{l0\mu} = W_{kl,2c'\lambda\mu}\,W_{k0\lambda};
\end{array}
\right.
$$

$$
(28)\quad \begin{array}{l}
R_{ik\lambda}\,S_{ik\mu} = S_{ik\mu}\,R_{ik\lambda} \\
\quad = (V_{ik\lambda}\,U_{ik\mu})\left(V_{kl,\frac{-1}{\lambda}}\,W_{ik,\frac{1}{\mu}}\right)(V_{ik\lambda}\,U_{ik\mu}) = \left|\begin{array}{ll} x_i & -\lambda\mu\,y_i \\ y_i & -\dfrac{1}{\lambda\mu}\,x_i \\ x_k & -\dfrac{\mu}{\lambda}\,y_k \\ y_k & -\dfrac{\lambda}{\mu}\,x_k \end{array}\right|;
\end{array}
$$

---

(1) En changeant λ en $-\lambda$, et en posant $\mu(1-c\lambda\mu)=\mu'$, $\dfrac{\lambda}{1-c\lambda\mu}=\lambda'$ (d'où $\lambda'\mu'=\lambda\mu$), on peut écrire cette équation sous la forme

$$V_{0k\lambda}\,U_{0k\mu} = m_{k,\left(\frac{\mu'}{\mu}\right)^2}\,U_{0k\mu'}\,V_{0k\lambda}.$$

$$(29)\quad \begin{cases} (R_{ik\lambda}S_{ik\mu})^2 = 1, \qquad R_{ik\lambda}S_{ik\mu} = t_{ik}m_{i,-\lambda\mu}m_{k,-\frac{\mu}{\lambda}}, \\ t_{ik} = R_{ik1}S_{ik,-1} = R_{ik,-1}S_{ik1}, \qquad m_{ik\lambda} = t_{ik}R_{ik\lambda}S_{ik,-\lambda}, \\ m_{ik\lambda}m_{ik\lambda}^{-1} = R_{ik,-1}R_{ik\lambda}, \qquad m_{ik\lambda}m_{ik\lambda} = S_{ik,-1}S_{ik\lambda}, \\ m_{i,\frac{\mu}{\lambda}}m_{k,\frac{\lambda}{\mu}} = R_{ik,-\lambda}R_{ik\mu} = V_{ki\sigma'}V_{ik\rho'}V_{ki\sigma}V_{ik\rho}, \\ 1+\rho\sigma = 1+\rho'\sigma' = \frac{\mu}{\lambda}, \qquad \rho' = -\frac{\rho\lambda}{\mu}, \qquad \sigma' = -\frac{\sigma\mu}{\lambda}, \\ \text{d'où, en transformant par } t_{ik}, \\ m_{i,\frac{\mu}{\lambda}}m_{k,\frac{\mu}{\lambda}} = S_{ik,-\lambda}S_{ik\mu} = W_{ki\sigma'}U_{ik\rho'}W_{ki\sigma}U_{ik\rho}. \end{cases}$$

50. $A(n, \pi)$ *dérive de* Ψ, *des* t, *des* m *et des* V (*cf.* **8**). En effet, soit α une substitution de A, et reprenons les notations du n° **26**. Les éléments de la première colonne de α n'étant pas tous nuls, on peut, en multipliant à droite par une V, une U [1] ou une $m_{1\lambda}t_1^\theta$ ($\theta = 0$ ou 1), rendre α_{11} égal à 1, puis de même, par les V et les W, annuler les α_{i1}, β_{i1} où $i \neq 1$. Alors, d'après (7), $\beta_{11} = 0$, et, d'après (4), $\beta'_{11} = 1$. On pourra donc, par les V et les U, annuler les β'_{i1}, α'_{i1} où $i \neq 1$. Alors, d'après (8), $\alpha'_{11} = 0$, et l'on est ramené à une substitution de A_1 (**27**).

Donc, toute substitution de $A(n, \pi)$ *a un déterminant égal à* ± 1 (pour $p \neq 2$, cela résultait déjà de $\alpha a \bar{\alpha} = a$, d'où $|\alpha|^2 = 1$). *Donc, pour* $p \geqq 2$, *le p. g. c. d. de* A, I *est* D, *ce qui détermine l'ordre de* $\mathfrak{A}$.

51. Pour obtenir de même un système de générateurs de $\overline{Q}_2(n, \pi)$, il suffit d'exprimer les générateurs de Ψ et les $V_{0\nu}$, $V_{\nu 0}$ par les générateurs de $Q_0(n, \pi^2)$. Or, d'après le n° **25**, en écrivant $x_{\nu'}$, $y_{\nu'}$, $t_{\nu'}$, $m_{\nu'\sigma}$ ($\nu' = \nu + 1$) pour x_1, y_1, t_1, $m_{1\sigma}$, on a d'abord

$$m_{0s_0s_1} = m_{\nu's}, \qquad s = s_0 + \upsilon s_1, \qquad \psi(s_0, -s_1) = c \qquad (s_0, s_1 \text{ réels}),$$

$$t_0 = t_{\nu'}m_{\nu'q}, \qquad q = \varkappa\dot{\varkappa}^{-1}, \qquad \text{d'où} \qquad q\dot{q} = 1$$

$$(\text{si } c' = c, \text{ donc } \upsilon\dot{\upsilon} = 1, \ t'_0 = t_{\nu'}m_{\nu',-q\upsilon}).$$

---

[1] Si $\delta \neq 0$, $2c\alpha_{01} + b\beta_{01}$ et $b\alpha_{01} + 2c'\beta_{01}$ ne peuvent s'annuler à la fois. Si donc, pour $\delta \neq 0$, les α_{i1}, β_{i1} où $i > 0$ sont nuls, on pourra rendre α_{11} égal à 1 en multipliant à droite par une U_{01} ou une V_{10}.

Déterminons maintenant $\rho = \rho_0 + \upsilon\rho_1$ (ρ_0 et ρ_1 réels) par les conditions

$$\varkappa\rho\upsilon - \dot{\varkappa}\dot{\rho}\dot{\upsilon} = c\lambda(\upsilon - \dot{\upsilon}), \qquad \varkappa\rho - \dot{\varkappa}\dot{\rho} = c\mu(\upsilon - \dot{\upsilon}),$$

λ et μ étant arbitraires dans Θ (le déterminant de ces équations en ρ_0, ρ_1 est δc^{-1}), d'où

$$\varkappa\rho + \dot{\varkappa}\dot{\rho} = 2c\lambda + b\mu, \qquad \varkappa\rho\upsilon + \dot{\varkappa}\dot{\rho}\dot{\upsilon} = -2c'\mu - b\lambda, \qquad \rho\dot{\rho} = \psi(\lambda, \mu).$$

On aura

$$(30)\quad P_{i\rho} = V_{i\nu'\rho}U_{i\nu'\dot{\rho}} = U_{i\nu'\rho}V_{i\nu'\dot{\rho}} = \begin{vmatrix} x_i & x_i - \rho\dot{\rho}y_i + \rho x_{\nu'} + \dot{\rho}y_{\nu'} \\ x_{\nu'} & x_{\nu'} - \dot{\rho}y_i \\ y_{\nu'} & y_{\nu'} - \rho y_i \end{vmatrix} = U_{i0\lambda}V_{i0\mu},$$

d'où, en transformant par t_i et en changeant λ, μ en $-\lambda$, $-\mu$,

$$(31)\quad \begin{aligned} O_{i\rho} &= t_i P_{i,-\rho} t_i \\ &= W_{\nu'i\rho}V_{\nu'i\dot{\rho}} = V_{\nu'i\dot{\rho}}W_{\nu'i\rho} = \begin{vmatrix} y_i & -\rho\dot{\rho}x_i + y_i - \rho x_{\nu'} - \dot{\rho}y_{\nu'} \\ x_{\nu'} & x_{\nu'} + \dot{\rho}x_i \\ y_{\nu'} & y_{\nu'} + \rho x_i \end{vmatrix} = V_{0i\lambda}W_{0i\mu} \quad (^1). \end{aligned}$$

En faisant λ ou μ nul, on obtient l'expression de $V_{i0\mu}$, $V_{0i\lambda}$, $U_{i0\lambda}$, $W_{0i\mu}$ par les générateurs de $Q_0(n, \pi^2)$. Mais comme le p. p. c. m. $\overline{P}_i$ des $P_{i\rho}$ ($P_{i\rho}$ contient deux paramètres réels) coïncide avec celui P_i des $V_{i0\mu}$, $U_{i0\lambda}$ (abélien principal d'ordre π^2), *on peut prendre pour générateurs de* $\overline{Q}_2(n, \pi)$ *les* $P_{i\rho}$, *joints aux générateurs de* $Q_0(n-2, \pi)$ *et de* Ψ.

Remarque. — Supposons ψ réductible, δ et c étant $\neq 0$. Définissons u, u', k, k', s comme aux n^{os} **24** et **25**, et posons $r = r_0 + ur_1$, $r' = r_0 + u'r_1$. Écrivons encore $x_{\nu'}$, $y_{\nu'}$, $t_{\nu'}$, $m_{\nu'\sigma}$ ($\nu' = \nu + 1$) pour x_1, y_1, t_1, $m_{1\sigma}$. On pourra conserver les formules précédentes en y remplaçant υ, $\dot{\upsilon}$, $\varkappa$, $\dot{\varkappa}$, ρ, $\dot{\rho}$, ρ_0, ρ_1 par u, u', k, k', r, r', r_0, r_1 (r_0 et r_1 sont déterminés par r et r', et inversement). Mais ici $V_{i\nu'r'}$, $V_{\nu'ir'}$, $U_{i\nu'r}$, $W_{\nu'ir}$, qui conservent $\Sigma_1^{\nu'} x_i y_i$ s'expriment *a priori* par les x_i, y_i,

---

(1) On voit directement que $V_{i\nu'\rho}U_{i\nu'\sigma}$ n'est dans Θ que si $\sigma = \dot{\rho}$.

x, y en substitutions de A, et pour préciser,

$$V_{i\nu' r'} = U_{i0,\lambda_1 u} V_{i0\lambda_1}, \qquad \lambda_1 = \frac{kr}{c(u-u')};$$

$$V_{\nu' i r'} = V_{0i,\lambda'_1 u'} W_{i0\lambda'_1}, \qquad \lambda'_1 = \frac{k' r'}{c(u'-u)}.$$

52. *Supposons ψ irréductible. Des formules* (28)-(31), *en posant* $-\rho\dot{\rho} = \chi$, $-\frac{\dot{\rho}}{\rho} = s\,(s\dot{s} = 1)$, *il résulte que* $t_{i\nu'} m_{i\chi} m_{\nu's} = P_{i\rho} t_i P_{i,-\frac{\rho}{\chi}} t_i P_i$ *est réelle.*

Si $s = 1$, *le système des équations en* ρ *équivaut à* $\rho^2 = \chi$, $\rho\dot{\rho} = -\chi$ *et est compatible toujours et seulement si* $\chi\delta$ (¹) *est carré dans* Θ.

Si $s = -1$, *la condition de compatibilité est que* $-\chi$ *soit carré dans* Θ.

Si s *est* $\neq \pm 1$ (*donc* $\neq \dot{s}$) *et vérifie* $s^2 + b's + 1 = 0$, l'équation $-\frac{\dot{\rho}}{\rho} = s$ revient, en posant $\rho = \rho'_0 + s\rho'_1$ (ρ'_0, ρ'_1 réels) et $\rho_2 = \frac{\rho'_0}{b'+1}$, à $\rho = \rho_2(1-\dot{s})$, et l'équation $-\rho\dot{\rho} = \chi$ à $\rho_2^2 = \frac{\chi(2-b')}{b'^2-4}$. *La condition de compatibilité équivaut donc à celle que* $\chi\delta(2-b')$ *ou* $\chi\delta(s+s^{-1}+2)$ *soit carré dans* Θ. *En particulier :* 1° *si* $p > 2$, *et si* $\chi\delta$ *est carré, la condition revient à celle que l'ordre de* s *divise* $\frac{\pi+1}{2}$, *c'est-à-dire que* s *soit le carré d'une racine d'équation quadratique réciproque (irréductible puisque* $s \neq \dot{s}$) (*cf.* **25**); 2° *si* $s = q$, *la condition est que* $\chi\delta c$ *soit carré, et cela même si* $q = \pm 1$ (car si $q = 1$, c est carré dans Θ, et si $q = -1$, $-c = \varkappa^2$ est non carré dans Θ); 3° *si* $s = -\upsilon$, *la condition est que* $\chi\delta c(b+2c)$ *soit carré dans* Θ.

On a donc, d'après ce qui précède, $M\delta$ désignant un carré de Θ, l'expression par les $V_{0\nu}$, V_{i0}, $U_{0\nu}$, $W_{0\nu}$:

(¹) δ est introduit ici en vue du cas où ψ est réductible, qui sera étudié tout à l'heure.

1° De $m_{\nu's} \doteq (m_{\iota M}^{-1} t_{\iota\nu'})(t_{\iota\nu'} m_{\iota M} m_{\nu's})$ si l'ordre de s divise $\frac{\pi+1}{2}$, ou si $s = -1$ et $\pi \equiv 3 \pmod 4$ (*cf.* **39**) (¹);

2° De $t_{0i} m_{i,cM} = t_{\iota\nu'} m_{i,cM} m_{\nu'q}$;

3° Si $c' = c$, de $t_i t'_0 m_{i,b-2c} = \left(t_{\iota\nu'} m_{i,\frac{c}{M}} m_{\nu'q}\right)\left(m_{i,\frac{M}{c^2}} t_{\iota\nu'}\right) t_{\iota\nu'} m_{i,c(b-2c)} m_{\nu'_1-\nu})$.

Remarque I. — Supposons ψ réductible, δ et c étant $\neq 0$ (²). Les résultats précédents subsistent en y remplaçant, comme au n° **31**, ν, $\dot{\nu}$, $\varkappa$, $\dot{\varkappa}$, ρ, $\dot{\rho}$, ρ_0, ρ_1 par u, u', k, k', r, r', r_0, r_1 et $\dot{s}$ par $s' = s^{-1}$ (réel). On le voit par des raisonnements tout semblables.

Remarque II. — Soit $\psi = cx^2$. Alors $t_0 = |x, -x|$, et l'on a

$$t_{0k} m_{k,-c\lambda^2} = m_{k,-\frac{1}{c\lambda^2}} t_{0i} = U_{0k\lambda} V_{0k,\frac{1}{c\lambda}} U_{0k\lambda}.$$

En transformant par τt_k (*cf.* **28, 29**), on a une formule analogue pour $t_{0k} m_{k,-c'\lambda^2}$ si $\psi = c'y^2$.

33. Il est clair que $Q_0(n, \pi)$ et $Q_1(n, \pi)$ (n ayant la parité de l'indice de Q) divisent $\overline{H}(n, \pi)$ (**9**). Cherchons les p. g. c. d. respectifs $\Gamma_\eta(n, \pi^2)$, $\Gamma'_\eta(n, \pi^2)$ de $Q_\eta(n, \pi^2)$, $Q'_\eta(n, \pi^2)$ ($\eta = 0, 1$) avec $\overline{H}(n, \pi)$ (*cf.* **20**). Une substitution α de Γ'_η devra vérifier, en même temps que les équations $(\overline{4})$-$(\overline{6})$ du n° **9** (avec $f = 1$), les équations (4)-(8)

(¹) Dans la quatrième des formules (26), pour que l'ordre de $s = s_0 + \nu s_1$ divise $\frac{\pi+1}{2}$ (alors s_1 est $\neq 0$, donc $2 - b\lambda\mu \neq 0$), il faut et suffit que la quantité $h = 2 + 2s_0 - \frac{b}{c} s_1$ soit un carré k^2. Mais comme $\varphi h = (2 - b\lambda\mu)^2 (\neq 0)$, φ est en même temps un carré, et la formule considérée fournit, d'après (29), une expression de $m_{0s_0s_1}$ par les V, U, W. Pour que $s = -1$, il faut et suffit que $b\lambda\mu = 2$, et que $\varphi = cc'\lambda^2\mu^2 - 1$, d'où $b^2\varphi = -\delta$. Donc φ n'est alors carré que si $\pi \equiv 3 \pmod 4$: dans ce cas, on a de même, d'après (29), une expression de $m_{0s_0s_1}$ par les V, U, W (*cf.* **39**).

(²) On ramène immédiatement le cas où $c = 0$, $c' \neq 0$ au cas $c \neq 0$, et le cas $c = c' = 0$ au cas $\psi = 0$. Il est toujours entendu d'ailleurs que le cas où ψ est réductible ne diffère lui-même que par un changement de variables du cas $\psi = 0$.

du n° **26**. En particulier les deux systèmes linéaires

$$\left\{\begin{array}{l}\Sigma_{i=1}^{\nu}(\alpha_{ij}\dot{\beta}_{ik}+\beta_{ij}\dot{\alpha}_{ik})+2\eta c\alpha_{0j}\dot{\alpha}_{0k}=2\eta\dfrac{c_jc_k}{c}\\ \qquad\qquad (j=0,\ldots,\nu),\\ \Sigma_{i=1}^{\nu}(\alpha'_{ij}\dot{\beta}_{ik}+\beta'_{ij}\dot{\alpha}_{ik})+2\eta c\alpha'_{0j}\alpha'_{0k}=b_{jk}\\ \qquad\qquad (j=1,\ldots,\nu),\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}\Sigma_{i=1}^{\nu}(\alpha_{ij}\beta_{ik}+\beta_{ij}\alpha_{ik})+2\eta c\alpha_{0j}\alpha_{0k}=2\eta f\dfrac{c_jc_k}{c}\\ \qquad\qquad (j=0,\ldots,\nu),\\ \Sigma_{i=1}^{\nu}(\alpha'_{ij}\beta_{ik}+\beta'_{ij}\alpha_{ik})+2\eta c\alpha'_{0j}\alpha_{0k}=fb_{jk}\\ \qquad\qquad (j=1,\ldots,\nu)\end{array}\right.$$

où k est supposé fixe, donnent $\dot{\beta}_{ik}=f^{-1}\beta_{ik}$, $\dot{\alpha}_{jk}=f^{-1}\alpha_{jk}$ $(i=1,\ldots,\nu;$ $j=0,\ldots,\nu)$. De même $\dot{\beta}'_{ik}=f^{-1}\beta'_{ik}$, $\dot{\alpha}'_{jk}=f^{-1}\alpha'_{jk}$ $(i=1,\ldots,\nu;$ $j=0,\ldots,\nu)$.

Donc d'abord Γ_η, *qui correspond à* $f=1$, *coïncide avec* $Q_\eta(n,\pi^2)$. Ensuite f est une puissance de $\iota'^{\pi-1}$, et même, pour n impair, de $\iota'^{2(\pi-1)}$ $\Big[$car alors $\alpha a\bar{\alpha}=fa\,(p>2)$, d'où $|\alpha|^2=f^n$, et $|\alpha|^{\pi+1}=1$ (**2**), donc $f^{n\frac{\pi+1}{2}}=1\Big]$.

Soit d'abord $n=2\nu$, *donc* $\eta=0$. Posons $\overline{m}_{i\rho}=\begin{vmatrix}x_i & \rho x_i\\ y_i & \rho^{-1}y_i\end{vmatrix}$ (**9**), $\mu_\rho=\Pi'_1\overline{m}_{i\rho}$, $\{\mu_\rho\}=M$. Comme μ_ρ multiplie a par $\iota'^{1-\pi}$, on a $\Gamma'_0=M\Gamma_0$, M étant premier à Γ_0; $(\Gamma'_0,\Gamma_0)=\pi+1$, et Γ'_0 contient J, dont chaque substitution a par $\iota'^{2(\pi-1)}$.

Soit $n=2\nu+1$, *donc* $\eta=1$ *et* $p\neq 2$. Le produit μ de $\{x,\iota'^{\pi-1}x\}$ par $\Pi'_1\overline{m}_{i\rho}^2$ multiplie a par $\iota'^{2(\pi-1)}$. Donc $\Gamma'_1=\{\mu\}\Gamma_1$, $\{\mu\}$ étant premier à Γ_1, et $(\Gamma'_1,\Gamma_1)=\frac{1}{2}(\pi+1)$. On a évidemment aussi $\Gamma'_1=J\Gamma_1$; mais le p. g. c. d. de J, Γ_1 est D, d'ordre 2.

Considérons maintenant $\overline{Q}'_2(n,\pi)$ $(n=2\nu',\ \nu'=\nu+1)$. Soit α une de ses substitutions, et reprenons les notations du n° **26**. D'après la forme de a avec les variables de $\overline{Q}'_2$, les coefficients de α satisfont aux mêmes conditions que si α était dans $Q'_0(n,\pi^2)$. Dans les p. g. c. d. respectifs $\overline{\Gamma}_2(n,\pi)$ et $\overline{\Gamma}'_2(n,\pi)$ de $\overline{Q}_2(n,\pi)$ et $\overline{Q}'_2(n,\pi)$ avec $\overline{\Pi}(n,\pi)$

divisant respectivement $\Gamma_0(n, \pi^2)$ et $\Gamma'_0(n, \pi^2)$. Mais de plus : 1° les α_{ik}, α'_{ik}, β_{ik}, β'_{ik} où i et k sont $\leqq \nu$ sont réels; 2° X_i et Y_i étant réels pour $i \leqq \nu$, et $x_{\nu'}$ conjugué de $y_{\nu'}$, $\alpha_{i\nu'}$ est conjugué de $\alpha'_{i\nu'}$, et $\beta_{i\nu'}$ de $\beta'_{i\nu'}$; 3° $X_{\nu'}$ étant conjugué de $Y_{\nu'}$, $\alpha_{\nu' i}$ est conjugué de $\beta_{\nu' i}(i \leqq \nu)$, $\alpha'_{\nu' i}$ de $\beta'_{\nu' i}(i \leqq \nu)$, $\alpha_{\nu'\nu'}$ de $\beta'_{\nu'\nu'}$, et $\alpha'_{\nu'\nu'}$ de $\beta_{\nu'\nu'}$.

Or on a, en désignant par e un élément quelconque de α, $e = f\dot{e}$. La relation $\dot{\alpha}_{i\nu'} = \alpha'_{i\nu'}(i \leqq \nu)$, jointe à $\alpha_{i\nu'} = f\dot{\alpha}_{i\nu'}$, $\alpha'_{i\nu'} = f\dot{\alpha}'_{i\nu'}$, donne $\alpha_{i\nu'} = f^2\alpha_{i\nu'}$. De même $\beta_{i\nu'} = f^2\beta_{i\nu'}$, $\alpha_{\nu'\nu'} = f^2\alpha_{\nu'\nu'}$, $\beta_{\nu'\nu'} = f^2\beta_{\nu'\nu'}$. Donc $f^2 = 1$. Si $f = -1$, l'équation $\dot{e} = fe$ montre que e a la forme $(\upsilon - \dot{\upsilon})e_0$, e_0 étant réel. La comparaison des relations (4) et (5) pour $k = \nu'$ donne d'ailleurs $(\alpha_{\nu'\nu'} - \beta_{\nu'\nu'})^2 = 1$, ou, en posant $\alpha_{\nu'\nu'} = (\upsilon - \dot{\upsilon})r$, $\beta_{\nu'\nu'} = (\upsilon - \dot{\upsilon})s$, ($r$ et s réels), $(r - s)^2 = \delta$, ce qui est absurde. *Donc* $f = 1\,(p \geqq 2)$, *d'où* $\overline{\Gamma}'_2 = \overline{\Gamma}_2 \leqq Q_0(n, \pi)$, *et de plus, pour* $i \leqq \nu$, $\alpha_{i\nu'} = \alpha'_{i\nu'}$, $\beta_{i\nu'} = \beta'_{i\nu'}$, $\alpha_{\nu' i} = \beta_{\nu' i}$, $\alpha'_{\nu' i} = \beta'_{\nu' i}$, $\alpha_{\nu'\nu'} = \beta'_{\nu'\nu'}$, $\alpha'_{\nu'\nu'} = \beta_{\nu'\nu'}$, *avec* $(\alpha_{\nu'\nu'} - \beta_{\nu'\nu'})^2 = 1$. Il est clair que $\overline{\Gamma}_2$ *contient toutes les substitutions de* $Q_0(n, \pi)$ *qui vérifient ces conditions*, en particulier les $P_{i\lambda}$ où λ est réel et les $m_{\nu' s}$, $m_{\nu' s}t_\nu$ où s est réel, donc égal à ± 1 [car $s^{\pi+1} = 1$ (**23**)].

Or, en multipliant au besoin α à droite par une $P_{i\lambda}$ ou une $O_{i\lambda}$, on peut annuler $\alpha_{\nu'\nu'}$ ou $\beta_{\nu'\nu'}$ [si tous les $\alpha_{i\nu'}$, $\beta_{i\nu'}$ où $i \leqq \nu$ sont nuls, $\alpha_{\nu'\nu'}\beta_{\nu'\nu'} = 0$ d'après (7)]. En multipliant ensuite au besoin à droite par $t_{\nu'}$ et $m_{\nu'-1}$, on peut réduire $\alpha_{\nu'\nu'} = \beta'_{\nu'\nu'}$, à 1, et $\alpha'_{\nu'\nu'} = \beta_{\nu'\nu'}$ à 0. Si alors les $\alpha_{i\nu'}$, $\beta_{i\nu'}$ où $i \leqq \nu$ ne sont pas tous nuls, on les annulera de même tous sauf un à l'aide des V, U, W, puis le dernier à l'aide d'une P. Or, leur nullité entraîne [d'après (5), (6) pour $k = \nu'$] celle des $\alpha_{\nu' i} = \beta_{\nu' i}$, $\alpha'_{\nu' i} = \beta'_{\nu' i}$. *Donc* $\overline{\Gamma}_2$ *dérive de* $Q_0(2\nu, \pi)$, *des* $P_{i\lambda}$ *et de* $\{m_{\nu'-1}, t_{\nu'}\}$.

Pour préciser davantage, *soit d'abord* $p \neq 2$. Remplaçons les variables $x_{\nu'}$, $y_{\nu'}$ par $x = \frac{1}{2}(x_{\nu'} + y_{\nu'})$, $y = \frac{1}{2}(x_{\nu'} - y_{\nu'})$, d'où $\psi = x^2 - y^2$. Convenons en outre de négliger la nature des variables x, y, qui sont imaginaires, et d'identifier les substitutions avec leurs matrices. Alors $P_{i\lambda}$, $O_{i\lambda}$ et $t_\nu m_{\nu'-1}$ deviennent respectivement $U_{i0\lambda}$, $V_{0i\lambda}$, t_0 du groupe de $\Sigma_1^\nu x_i y_i + x^2$. *Donc le p. p. c. m.* $\overline{\Gamma}_2^0$ *de* $Q_0(2\nu, \pi)$, *des* $P_{i\lambda}$, *des* $O_{i\lambda}$ *et de* $t_\nu m_{\nu'-1}$ *est semblable à* $Q_1(2\nu + 1, \pi)$. *Chaque substitution de* $\overline{\Gamma}_2^0$ *est permutable à*

$t_\nu = |y, -y|$, et l'on verra au n° **54** que $\overline{\Gamma}_2$ *est le produit direct de* $\overline{\Gamma}_2$ *par* $\{t_\nu\}$. *L'indice de* $\overline{\Gamma}_2$ *dans* $Q_0(n, \pi)$ *est* $\frac{1}{2}(\pi^{2\nu+1} - \pi^\nu)$ (*cf.* **27**).

Soit $p = 2$ (donc $m_{\nu,-} = 1$). Posons $x = x_\nu + y_\nu$, $y = y_\nu$, d'où $\psi = xy + y^2$. Alors, avec les mêmes conventions, $P_{i\lambda}$ et $O_{i\lambda}$ deviennent respectivement $V_{i0\lambda}$, et $W_{0i\lambda}$ du groupe de $\Sigma_1^\nu x_i y_i + y^2$. *Donc le p. p. c. m. de* $\overline{\Gamma}_2^0$ *de* $Q_0(2\nu, \pi)$, *des* $P_{i\lambda}$ *et des* $O_{i\lambda}$ *est semblable à* $Q_1(2\nu+1, \pi)$ $[\equiv G(2\nu, \pi)$ (**26**)$]$. *Chaque substitution de* $\overline{\Gamma}_2^0$ *est permutable à* $t_\nu = |x, x+y|$, et l'on verra au n° **54** que $\overline{\Gamma}_2$ *est encore le produit direct de* $\overline{\Gamma}_2^0$ *par* $\{t_\nu\}$. L'indice de $\overline{\Gamma}_2$ dans $Q_0(n, \pi)$ *est ici* $\pi^{2\nu+1} - \pi^\nu$.

On voit d'ailleurs comme au n° **20** que, *dans* $\overline{H}(n, \pi)$, *le normalisant de* $\overline{\Gamma}_\eta$ *est* $\overline{\Gamma}'_\eta (\eta = 0, 1)$, *et celui de* $\overline{\Gamma}_2$, $\overline{\Gamma}'_2 = \overline{\Gamma}_2$.

54. *Soit, pour* $p > 2$, comme précédemment, $A^0(n, \pi)$ *le diviseur de* A *formé des substitutions de déterminant* 1, *donc normal dans* A′ : il est clair que $(A, A^0) = 2$. *On peut encore définir* A^0 *comme le p. p. c. m. des substitutions* $t_{jj'}$, $V_{jj'}$, U_{jk}, W_{jk}, $m_j (j, j' > 0; k > 0)$, car ce p. p. c. m. A'_0 est évidemment $\subset A^0$ et permutable à t_j, en sorte que $A'_0 + t_j A'_0$ est un groupe contenant tous les générateurs de A. Si d'ailleurs ψ est irréductible, la forme imaginaire $\overline{A}^0(n, \pi) = \overline{Q}_2^0(n, \pi)$ de A^0 est évidemment le p. g. c. d. de $\overline{Q}$ et de $Q_0^0(n, \pi^2)$.

Pour $p = 2$ (n pair), *la seconde définition que j'adopterai désormais, a un sens;* mais elle ne permet pas d'affirmer de suite que $(A, A^0) = 2$, ni, si $A^0 < A$, que A^0 soit normal dans A′.

Je dis que, même si $p = 2$, $(A, A^0) = 2$ (et l'on verra au n° **59** que A^0 *est encore normal dans* A′). Pour le démontrer, supposons d'abord $\psi = 0$, et considérons la quadrique Φ définie par $\Sigma_1^\nu x_i y_i = 0$, les 2ν coordonnées étant homogènes et variant dans Ω. Soit L la variété définie par un système s_ν de ν équations linéaires indépendantes entre les x_i, y_i. Soit ρ le rang du déterminant des coefficients des x_i dans s_ν. Supposons que le déterminant des coefficients de $x_1, \ldots, x_\rho$ dans les ρ premières équations de s_ν soit $\neq 0$, résolvons-les en $x_1, \ldots, x_\rho$, et portons les valeurs de $x_1, \ldots, x_\rho$ dans les $\nu - \rho$ dernières équa-

tions : d'après l'hypothèse faite sur le rang, $x_{\rho+1}, \ldots, x_\nu$ disparaîtront de ces $\nu - \rho$ équations. Résolvons le système $s_{\nu-\rho}$ de ces $\nu - \rho$ équations (qui sont indépendantes) par rapport à $\nu - \rho$ des y_i choisis de telle manière que le nombre α des y_i d'indice $\leqq \rho$ soit minimum. On peut évidemment choisir l'ordre des x (qui détermine celui des y d'après l'équation de Φ) de manière que ces $\nu - \rho$ y_i soient $y_1, \ldots, y_\alpha$ $(\alpha \leqq \rho)$, $y_{\rho+1}, \ldots, y_{\rho+\beta}$ $(\alpha + \beta = \nu - \rho)$. Comme on vient de le voir, *ces* $\nu - \rho$ y_i *ne dépendent d'aucun* x. De plus, *si* $\alpha \geqq 1$, $y_1, \ldots, y_\alpha$ *ne dépendent pas des* y_i *où* i *est* $> \rho + \beta$, car si y_i, par exemple, dépendait de $y_{\rho+\beta+1}$, on pourrait résoudre $s_{\nu-\rho}$ en $y_2, \ldots, y_\alpha, y_{\rho+1}, \ldots, y_{\rho+\beta+1}$ contre l'hypothèse faite sur α. Je supposerai qu'on a porté dans $x_1, \ldots, x_\rho$ les expressions de $y_1, \ldots, y_\alpha, y_{\rho+1}, \ldots, y_{\rho+\beta}$ par les autres y.

Cherchons maintenant les conditions pour que L soit sur Φ (je dirai qu'alors L est une *génératrice* de Φ). Portons pour cela dans $\Sigma_1^\nu x_i y_i = 0$ les expressions obtenues de $x_1, \ldots, x_\rho, y_1, \ldots, y_\alpha, y_{\rho+1}, \ldots, y_{\rho+\beta}$. Les termes $\Sigma_1^{\rho+\beta} x_i y_i$ ne fournissent aucun terme $x_k y_k$ où k soit $> \rho + \beta$; car $\Sigma_1^\alpha x_i y_i$ ne fournit aucun terme où y ait un indice $> \rho + \beta$, et il en est de même de $\Sigma_{\alpha+1}^\rho x_i y_i$ et $\Sigma_{\rho+1}^{\rho+\beta} x_i y_i$, puisque $y_{\alpha+1}, \ldots, y_\rho$ et $x_{\rho+1}, \ldots, x_{\rho+\beta}$ sont des variables indépendantes. Donc $\rho + \beta = \nu$, $\alpha = 0$, et l'on peut supposer que les équations de L ont la forme

$$(\mathrm{E}_1) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = b_{11} y_1 + \ldots + b_{1\rho} y_\rho + b_{1,\rho+1} x_{\rho+1} + \ldots + b_{1\nu} y_\nu, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_\rho = b_{\rho 1} y_1 + \ldots + b_{\rho\rho} y_\rho + b_{\rho,\rho+1} x_{\rho+1} + \ldots + b_{\rho\nu} y_\nu, \\ y_{\rho+1} = b_{\rho+1,1} y_1 + \ldots + b_{\rho+1,\rho} y_\rho, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_\nu = b_{\nu 1} y_1 + \ldots + b_{\nu\rho} y_\rho. \end{array} \right.$$

On voit alors directement que la condition nécessaire et suffisante pour que $\Sigma_1^\nu x_i y_i = 0$ soit identiquement vérifiée par ces expressions est que la matrice (b_{ik}) des coefficients de $y_1, \ldots, y_\rho, x_{\rho+1}, \ldots, x_\nu$ dans (E) soit alternée. Je dirai que ρ est le *genre de* (E) *ou de* L [ρ n'est pas le rang de (b_{ik})] *et de toute variété qui se déduit de* (E) *par une permutation des indices des* x *et des* y.

Une vérification simple montre que m_{ik} et V_{ik} ne changent pas le genre de (E) (on distinguera les quatre cas : $i, k \leqq \rho$; $i \leqq \rho$; $k > \rho$; $i > \rho$,

$k \leqq \rho$; $i, k > \rho$), tandis que t_i le fait varier d'une unité [si $i > \rho$, t_i le fait croître de 1, et il en est de même pour $i \leqq \rho$ si un des ν coefficients $b_{i,\rho+1}, \ldots, b_{i\nu}$ tel que b_{ik} est $\neq 0$, puisqu'on peut alors résoudre (E) par rapport à x_k, y_i et aux *autres* x, y des premiers membres; si $b_{i,\rho+1}, \ldots, b_{i\nu}$ sont tous nuls, le genre diminue de 1].

Donc les $t_l V_{ikl} t_l$ et les t_{ik} ne changent pas la parité du genre de (E). *Donc* A^0, *p. p. c. m. de ces substitutions et des* m_{ik}, *ne change pas cette parité, tandis que* t_i *la change. Donc, si* $\psi = 0$, $(A, A^0) = 2$.

Si n est pair et $\psi \neq 0$, l'expression des générateurs de A par ceux de $Q_0(n, \pi)$ ou de $Q_0(u, \pi^2)$ selon que ψ est réductible ou non (**24**, **31**, **32**) montre qu'*il en est encore de même*.

Si n est impair ($p > 2$), *on est ramené au cas de n pair*, en considérant A comme un diviseur du groupe $a + y^2$ (pour $\psi = cx^2$).

33. *Arrêtons-nous au cas de n pair*, et disons que les génératrices de genre pair sont *paires*, et forment le *premier système* ou le *système pair*, et que les autres sont *impaires*, et forment le *second système* ou le *système impair*. Il résulte de ce qui précède que, *pour* $p \geqq 2$, *et n pair*, A^0 *est le groupe des substitutions de A qui permutent exclusivement entre elles les génératrices de chaque système, tandis que* $t_j A^0$ *échange les systèmes*.

A^0 *permute transitivement les génératrices de chaque système*. Partons en effet d'une génératrice quelconque prise sous la forme (E), en y remplaçant ν par ν' (ψ peut ici être irréductible; on prendra alors $\overline{A}^0$ au lieu de A^0). On peut, par des V_{1kl}, $P_{1\nu'\sigma}$ (**31**) [en tenant compte de la dernière équation de (E) si $\nu' > \nu$] annuler $b_{1,\rho+1}, \ldots, b_{1\nu}$, puis, par t_1, diminuer le genre. En répétant un nombre pair de fois un groupe d'opérations analogue (tout produit de générateurs de A où les t_j figurent un nombre pair de fois est dans A^0), on arrivera à une génératrice de genre $\leqq 1$. Si elle est de genre 0, elle est définie par $y_1 = \ldots = y_\nu = 0$. Si elle est de genre 1, elle est définie par $x_i = 0$, $y_1 = \ldots = y_{i-1} = 0$, $y_{i+1} = \ldots = y_\nu = 0$, qui se ramène par t_{1i} à $x_1 = 0$, $y_2 = \ldots = y_\nu = 0$.

On remarquera que l'échange de x_i, y_i dans (E) fournit une géné-

ratrice dont l'intersection avec (E) s'obtient en adjoignant à (E) la seule équation $x_i = y_i$, c'est-à-dire dont l'intersection avec (E) a un nombre de dimensions de la parité de $\nu' + 1$. Au contraire soit (E′) le système déduit de (E) par une $m_{i\lambda}$, une $V_{i\lambda}$ ou une $P_{i\nu'\sigma}$, en éliminant, s'il y a lieu, $y_{\nu'}$ des $\nu' - 1$ premières équations à l'aide de la $\nu'^{\text{ième}}$. En retranchant de chaque équation de (E′) l'équation correspondante de (E) multipliée par un facteur convenable, on peut faire disparaître celui des $x_1, \ldots, x_\rho, y_{\rho+1}, \ldots, y_{\nu'}$ qui y figure.

Soit (E_0) le système ainsi obtenu. L'intersection de (E), (E′) est aussi celle de (E), (E_0). Or, dans (E_0), la matrice des coefficients de $y_1, \ldots, y_\rho, x_{\rho+1}, \ldots, x_{\nu'}$ est alternée, donc de rang pair (*E.*, 195). Donc le nombre des dimensions de l'intersection a la même parité que ν' [1].

Donc deux génératrices sont ou non du même système selon que le nombre des dimensions de leur intersection a ou non la parité de ν'. Donc une substitution α de A sera ou non dans A^0 selon que l'intersection d'une génératrice quelconque et de sa transformée par α aura ou non un nombre de dimensions de la parité de ν'.

36. Revenons maintenant à la définition de A^0 comme p. p. c. m. des générateurs autres que les $t_j (j \geq 0)$. On voit, en recourant au besoin à la forme $\overline{A}$ de A quand ψ est irréductible, que, pour $p \geq 2$ (n étant pair si $p = 2$), *toute expression d'une substitution de A^0 par les générateurs de A contient un nombre pair de t_j.* Les substitutions de A^0 sont dites *paires*, les autres substitutions de A *impaires;* A^0 sera dit le *groupe pair de a.* La méthode du n° **30** permet de reconnaître effectivement si une substitution est paire ou impaire.

---

[1] On pourrait démontrer d'abord [*cf.* Bertini, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi* (Pise, Spoerri, 1907), p. 129-135], comme dans le champ complexe ordinaire, que les génératrices forment deux systèmes, en rangeant dans le même système que l'une d'elles toutes celles qu'on en déduit par la variation des coefficients. La démonstration ne suppose pas que la variation soit continue, mais seulement que, pour $\nu = 1$ et $\psi = 0$, il y a deux systèmes définis comme on vient de le voir, ce qui est clair.

57 (¹). *Pour $p = 2$ ($n = 2\nu'$), on peut encore définir A^0 comme le groupe des substitutions α de A qui vérifient*

$$(32)\quad \begin{cases} I_\alpha = \Sigma_{ih}\alpha_{ih}\beta'_{ih} + b\Sigma_h\alpha_{0h}\beta'_{0h} \\ \qquad + B\Sigma_i\alpha_{i0}\beta'_{i0} + Bb\alpha_{00}\beta'_{00} + Cc(\alpha_{00}^2 + \beta_{00}^2 + \alpha_{00}'^2 + \beta_{00}'^2) = \nu' \\ \qquad\qquad (i, h = 1, \ldots, \nu). \end{cases}$$

En effet, soit λ la substitution qui se déduit de α en y remplaçant partout α par λ, et β par μ. On trouve, à l'aide des formules (4)-(8), (15)-(19), que $I_{\lambda\alpha} = I_\alpha + I_\lambda + \nu'$ (²).

Donc les substitutions de A qui vérifient (32) forment un groupe Γ,

---

(¹) *Comparer* Dickson, *Linear groups*, 205.

(²) On a d'abord

$$\begin{aligned} I_{\lambda\alpha} = & \quad \Sigma_{ijkl}(\alpha_{ik}\beta_{il}\lambda_{kj}\lambda'_{lj} + \alpha_{ik}\beta'_{il}\lambda_{kj}\mu'_{lj} + \beta_{il}\alpha'_{ik}\mu_{kj}\lambda'_{lj} + \alpha'_{ik}\beta'_{il}\mu_{kj}\mu'_{lj}) \\ & + b\Sigma_{jkl}(\alpha_{0k}\beta_{0l}\lambda_{kj}\lambda'_{lj} + \alpha_{0k}\beta'_{0l}\lambda_{kj}\mu'_{lj} + \beta_{0l}\alpha'_{0k}\mu_{kj}\lambda'_{lj} + \alpha'_{0k}\beta'_{0l}\mu_{kj}\mu'_{lj}) \\ & + B\Sigma_{ikl}(\alpha_{ik}\beta_{il}\lambda_{k0}\lambda'_{l0} + \alpha_{ik}\beta'_{il}\lambda_{k0}\mu'_{l0} + \beta_{il}\alpha'_{ik}\mu_{k0}\lambda'_{l0} + \alpha'_{ik}\beta'_{il}\mu_{k0}\mu'_{l0}) \\ & + Bb\Sigma_{kl}(\alpha_{0k}\beta_{0l}\lambda_{k0}\lambda'_{l0} + \alpha_{0k}\beta'_{0l}\lambda_{k0}\mu'_{l0} + \beta_{0l}\alpha'_{0k}\mu_{k0}\lambda'_{l0} + \alpha'_{0k}\beta'_{0l}\mu_{k0}\mu'_{l0}) \\ & + Cc\Sigma_k(\alpha_{0k}^2\lambda_{k0}^2 + \alpha_{0k}'^2\mu_{k0}^2 + \beta_{0k}^2\lambda_{k0}'^2 + \beta_{0k}'^2\mu_{k0}'^2 + \alpha_{0k}^2\lambda_{k0}'^2 + \alpha_{0k}'^2\mu_{k0}'^2 + \beta_{0k}^2\lambda_{k0}^2 + \alpha_{0k}'^2\mu_{k0}^2) \\ & \qquad (i, j = 1, \ldots, \nu;\ k, l = 0, \ldots, \nu). \end{aligned}$$

Dans ce qui suit, les parties soulignées sont celles qui sont soumises à une transformation. Les termes surmontés d'un trait seront réunis ultérieurement; Σ' indique des sommations où $k \neq i$; Σ'' des sommations où $k < l$.

Considérons Σ_{ijkl}. Dans cette somme, le second et le troisième terme donnent, en transformant $\Sigma_i\alpha_{ik}\beta'_{il}$ d'après (4), et en faisant un échange des indices de C : pour $k \neq l$,

$$\begin{aligned} & \Sigma'_{ijkl}\beta_{il}\alpha'_{ik}(\underline{\lambda_{lj}\mu_{kj} + \mu_{kj}\lambda'_{lj}}) + b\Sigma'_{jkl}(\alpha_{0l}\beta_{0k} + \beta_{0l}\alpha'_{0k})\lambda_{lj}\mu'_{kj} \\ = & B\Sigma'_{kl}\beta_{il}\alpha'_{ik}(\lambda_{l0}\mu'_{k0} + \mu_{k0}\lambda'_{l0}) + b\Sigma'_{jkl}(\alpha_{0l}\beta'_{0k} + \beta_{0l}\alpha'_{0k})\lambda_{lj}\mu_{kj}; \end{aligned}$$

pour $k = l$,

$$\begin{aligned} & \Sigma_{jk}(\alpha_{ik}\beta'_{ik}\lambda_{kj}\mu_{kj} + \underline{\beta_{ik}\alpha_{ik}\mu_{kj}\lambda'_{kj}}) \\ & \Sigma_{jk}\alpha_{ik}\beta'_{ik}(\underline{\lambda_{kj}\mu_{kj} + \mu_{kj}\lambda'_{kj}}) \\ & + \Sigma_{jk}\mu_{kj}\lambda'_{kj}[b(\alpha_{0k}\beta'_{0k} + \beta_{0k}\alpha'_{0k}) + 1] + (b-1)\Sigma_j\mu_{0j}\lambda'_{0j} \\ = & B\Sigma_{ik}\alpha_{ik}\beta'_{ik}(\lambda_{k0}\mu'_{k0} + \mu_{k0}\lambda'_{k0}) + b\Sigma_{jk}\mu_{kj}\lambda'_{kj}(\alpha_{0k}\beta_{0k} + \beta_{0k}\alpha'_{0k}) \\ & + \Sigma_{ik}\alpha_{ik}\beta'_{ik} + \Sigma_{jk}\mu_{kj}\lambda'_{kj} + (B-1)\Sigma_i\alpha_{i0}\beta'_{i0} + (b-1)\Sigma_j\mu_{0j}\lambda'_{0j}. \end{aligned}$$

Le premier et le quatrième terme de Σ_{ijkl} donnent :

et les t_j, *qui ne vérifient pas* (32), sont hors de Γ. Donc Γ est $< A$. D'ailleurs les générateurs de A^0 vérifient (32). Donc Γ est $\geqq A^0$. Mais (A, A_0) est $\leqq 2$. Donc $\Gamma = A^0$, et $(A, A^0) = 2$.

---

pour $k \neq l$,

$$\begin{aligned}
& \Sigma''_{ijkl}(\alpha_{ik}\beta_{il}\lambda_{kj}\lambda'_{lj} + \underline{\alpha_{il}\beta_{ik}}\lambda_{lj}\lambda'_{kj} + \alpha'_{ik}\beta'_{il}\mu_{kj}\mu'_{lj} + \underline{\alpha'_{il}\beta'_{ik}}\mu_{lj}\mu'_{kj}) \\
= \quad & \Sigma''_{ijkl}[\alpha_{ik}\beta_{il}(\underline{\lambda_{kj}\lambda'_{lj} + \lambda_{lj}\lambda'_{kj}}) + \alpha'_{ik}\beta'_{il}(\mu_{kj}\mu'_{lj} + \mu_{lj}\mu'_{kj})] \\
+ \quad & b\Sigma''_{jkl}[\lambda_{lj}\lambda'_{kj}(\alpha_{0k}\beta_{0l} + \alpha_{0l}\beta_{0k}) + \mu_{lj}\mu'_{kj}(\alpha'_{0k}\beta'_{0l} + \alpha'_{0l}\beta'_{0k})] \\
= \quad & \mathrm{B}\ \Sigma''_{ikl}[\alpha_{ik}\beta_{il}(\lambda_{k0}\lambda'_{l0} + \lambda_{l0}\lambda'_{k0}) + \alpha'_{ik}\beta'_{il}(\mu_{k0}\mu'_{l0} + \mu_{l0}\mu'_{k0})] \\
+ \quad & b\Sigma''_{jkl}[\lambda_{lj}\lambda'_{kj}(\alpha_{0k}\beta_{0l} + \alpha_{0l}\beta_{0k}) + \mu_{lj}\mu'_{kj}(\alpha'_{0k}\beta'_{0l} + \alpha'_{0l}\beta'_{0k})];
\end{aligned}$$

pour $k = l$, en transformant $\Sigma_j \lambda_{kj}\lambda'_{lj}$ et $\Sigma_j \mu_{kj}\mu'_{kj}$, puis $\Sigma_i \alpha_{ik}\beta_{ik}$, $\Sigma'_i \alpha'_{ik}\beta'_{ik}$,

$$\begin{aligned}
& \Sigma_k[\psi(\alpha_{0k}, \beta_{0k})\Psi(\lambda_{k0}, \lambda'_{k0}) + \psi(\alpha'_{0k}, \beta'_{0k})\Psi(\mu_{k0}, \mu'_{k0})] \\
& + c\Psi(\lambda_{00}, \lambda'_{00}) + c'\Psi(\mu_{00}, \mu'_{00}) + \mathrm{C}[\psi(\alpha_{00}, \beta_{00}) + c] + \mathrm{C}'[\psi(\alpha'_{00}, \beta'_{00}) + c'].
\end{aligned}$$

Considérons, dans $\mathrm{I}_{\beta\alpha}$, $b\Sigma_{jkl}$. Le premier terme de cette somme donne :
pour $k = l$,

$$\begin{aligned}
& b\Sigma''_{jkl}(\alpha_{0k}\beta_{0l}\underline{\lambda_{kj}\lambda'_{lj}} + \alpha_{0l}\beta_{0k}\lambda_{lj}\lambda'_{kj}) \\
= \ & b\Sigma''_{kl}(\alpha_{0k}\beta_{0l} + \alpha_{0l}\beta_{0k})\lambda_{lj}\lambda'_{kj} + \mathrm{B}\,b\Sigma''_{kl}\overline{\alpha_{0k}\beta_{0l}(\lambda_{k0}\lambda'_{l0} + \lambda_{l0}\lambda'_{k0})};
\end{aligned}$$

pour $k = l$, en transformant $\Sigma_j \lambda_{kj}\lambda'_{kj}$,

$$b\Sigma_k \alpha_{0k}\beta_{0k}\Psi(\lambda_{k0}, \lambda'_{k0}) + b\mathrm{C}\alpha_{00}\beta_{00}.$$

Le quatrième terme de $b\Sigma_{jkl}$ donne de même :
pour $k \neq l$,

$$b\Sigma'_{kl}(\alpha'_{0k}\beta'_{0l} + \alpha'_{0l}\beta'_{0k})\mu_{lj}\mu'_{kj} + \mathrm{B}\,b\Sigma'_{kl}\overline{\alpha'_{0k}\beta'_{0l}(\mu_{k0}\mu'_{l0} + \mu_{l0}\mu'_{k0})};$$

pour $k = l$,

$$b\Sigma_k \alpha'_{0k}\beta_{0k}\Psi(\mu_{k0}, \mu'_{k0}) + b\mathrm{C}'\alpha'_{00}\beta'_{00}.$$

Le second et le troisième terme de $b\Sigma_{jkl}$ donnent :
pour $k \neq l$, en échangeant k et l dans le premier des deux termes, et en transformant $\Sigma_j \mu_{kj}\lambda'_{lj}$,

$$b\Sigma_{jkl}(\alpha_{0l}\beta'_{0k} + \beta_{0l}\alpha'_{0k})\lambda_{lj}\mu'_{kj} + \mathrm{B}\,b\Sigma_{kl}\beta_{0l}\alpha'_{0k}(\lambda_{l0}\mu'_{k0} + \mu_{kl}\lambda'_{l0});$$

pour $k = l$, en transformant $\Sigma_j \lambda_{kj}\mu'_{kj}$,

$$b\Sigma_{jk}(\alpha_{0k}\beta_{0k} + \beta_{0k}\alpha'_{0k})\mu_{kj}\lambda'_{kj} + b\Sigma_k \alpha_{0k}\beta'_{0k}[\mathrm{B}(\lambda_{k0}\mu'_{k0} + \mu_{k0}\lambda'_{k0}) + 1] + b(\mathrm{B} - 1)\alpha_{00}\beta'_{00}.$$

Considérons, dans $\mathrm{I}_{\alpha\alpha}$, $\mathrm{B}\Sigma_{ikl}$. Le premier terme donne de même :

38 (¹). Tout changement de variables à coefficients dans $\mathfrak{S}$ qui conserve a conserve *a priori* A et A^0, puisque sa matrice est celle d'une substitution de A. Il conserve donc la parité (**34**) de chaque substitution α de A et celle de I_α.

Toute substitution α d'ordre impair de A *est dans* A^0, car α^2 est dans A^0, et α, étant d'ordre impair, est une puissance de α^2.

Dans la forme canonique d'une substitution α de A, *la parité du nombre des suites est celle de α.* En effet, prenons les variables canoniques de α qui rendent les comultiplicateurs (*S.*, 5) égaux aux multi-

---

pour $k \neq l$,

$$B\Sigma''_{ikl}\alpha_{ik}\beta_{il}(\lambda_{k0}\lambda'_{l0}+\lambda_{l0}\lambda'_{k0})+Bb\Sigma''_{kl}(\overline{\alpha_{0l}\beta_{0k}}+\alpha_{0k}\beta_{0l})\overline{\lambda_{l0}\lambda'_{k0}};$$

pour $k = l$,

$$B\Sigma_k\lambda_{k0}\lambda'_{k0}\psi(\alpha_{0k},\beta_{0k})+Bc\lambda_{00}\lambda'_{00}.$$

Le quatrième terme donne :
pour $k \neq l$,

$$B\Sigma''_{ikl}(\mu_{k0}\mu'_{l0}+\mu_{l0}\mu'_{k0})\alpha_{ik}\beta'_{il}+Bb\Sigma''_{kl}(\alpha'_{0k}\beta'_{0l}+\overline{\alpha'_{0l}\beta'_{0k}})\mu_{l0}\mu'_{k0};$$

pour $k = l$,

$$B\Sigma_k\mu_{k0}\mu'_{k0}\psi(\alpha'_{0k},\beta'_{0k})+Bc'\mu_{00}\mu'_{00}.$$

Le second et le troisième terme donnent :
pour $k \neq l$,

$$B\Sigma'_{ikl}\beta_{il}\alpha'_{ik}(\lambda_{l0}\mu'_{k0}+\mu_{k0}\lambda'_{l0})+Bb\Sigma_{kl}(\alpha_{0l}\beta'_{0k}+\beta_{0l}\alpha'_{0k})\lambda_{l0}\mu_{k0};$$

pour $k = l$,

$$B\Sigma_{ik}\alpha_{ik}\beta'_{ik}(\lambda_{k0}\mu'_{k0}+\mu_{k0}\lambda'_{k0})+B\Sigma_k[b(\alpha_{0k}\beta'_{0k}+\beta_{0k}\alpha'_{0k})+1]\mu_{k0}\lambda'_{k0}+B(b-1)\mu_{00}\lambda'_{00}.$$

Après ces transformations, en supprimant les termes qui se détruisent, en réunissant les termes surmontés d'un trait, et en séparant les termes dont sont formées les ψ et les Ψ, on obtient aisément

$$\begin{aligned} I_{\lambda\alpha} = {} & \Sigma_{ih}\alpha_{ih}\beta_{ih}+B\Sigma_i\alpha_{i0}\beta'_{i0}+b\Sigma_h\alpha_{0h}\beta_{0h}+Bb\alpha_{00}\beta_{00} \\ & +\Sigma_{jh}\mu_{hj}\lambda'_{hj}+B\Sigma_h\mu_{h0}\lambda'_{h0}+b\Sigma_j\mu_{0j}\lambda'_{0j}+Bb\mu_{00}\lambda'_{00} \\ & +Cc(\alpha'^2_{00}+\beta^2_{00}+\alpha''^2_{00}+\beta''^2_{00}+\lambda''_{00}+\mu''_{00}+\lambda''^2_{00}+\mu''^2_{00}), \end{aligned}$$

d'où, en transformant $\Sigma_h\mu_{hj}\lambda'_{hj}$ et $\Sigma_j\mu_{0j}\lambda'_{0j}$, la formule du texte.

(¹) *Cf.* JORDAN, *Journal de Mathématiques*, 1905, p. 278.

plicateurs. Si tous les multiplicateurs sont égaux à 1, on peut [1] introduire de nouvelles variables ramenant a à la forme canonique et α à une forme où l'on vérifie directement que $l_\alpha - \nu'$ a la parité du nombre des suites de α. Si les multiplicateurs ne sont pas tous égaux à 1, α est le produit de deux substitutions, évidemment échangeables, dont l'une α' s'obtient en remplaçant chaque multiplicateur et chaque comultiplicateur par 1 (α' a donc le même nombre de suites que α), et l'autre α'' en multipliant chaque variable par le multiplicateur de la suite où elle figure dans α. Or α' est d'ordre 2, et α'' d'ordre impair [comme l'exposant auquel appartient chaque multiplicateur $\neq 1$ dans le champ canonique ($S.$, 5) de α]. Donc α' et α'' sont des puissances de α ($E.$, 10) et par suite conservent a. Or quand on repasse aux variables qui réduisent a à son type canonique, α'', étant d'ordre impair, est paire, et l'on est ramené à considérer α'.

Remarque. — On a donc, pour $p = 2$, quatre critères de parité d'une substitution α de A : le premier fourni par l'expression de α en produit de générateurs de A^0; le second par les génératrices de la quadrique $a = 0$; le troisième par la parité de l_α; le quatrième par la parité des exposants des diviseurs élémentaires de $\alpha - s\varepsilon$, ε étant la matrice unité d'ordre n.

D'après les deux derniers critères, *toutes les fois que* A *contient la transposée de chacune de ses substitutions, il en est de même de* A^0. L'emploi de ces quatre critères n'exige que des opérations rationnelles; mais celui du premier et du troisième exige la réduction préalable de a à son type canonique.

39. Je désignerai par $B(n, \pi, a) = B(n, \pi)$ et j'appellerai *groupe réduit de* a : 1° pour $n > 2$, le p. p. c. m. des V_{ik}, U_{ik}, W_{ik} ($i, k = 0, \ldots, \nu$); 2° pour $n = 2$, le p. p. c. m. des m_{1r}^2, m_{1r} étant un générateur de A^0 si a est réductible dans $\mathfrak{S}$, de $\overline{A^0}$ si a est irréductible dans $\mathfrak{S}$; 3° pour $n = 1$, le groupe $1 = A^0$. Le groupe déduit de B, en y supposant les variables homogènes, sera désigné par $\mathfrak{B}(n, \pi, a) = \mathfrak{B}(n, \pi)$. Il sera commode aussi de remplacer la lettre B par R ou R_i quand A

---

[1] *Voir* DE SÉGUIER, *Journal de Mathématiques*, 1909, p. 1-63.

est remplacé par Q ou Q_i ($i = 0, 1, 2$), et alors $\mathfrak{B}$ sera de même remplacé par $\mathfrak{R}$ ou $\mathfrak{R}_i$. Enfin j'écrirai $\overline{B}$, $\overline{R}$, $\overline{R_i}$, $\overline{\mathfrak{B}}$, $\overline{\mathfrak{R}}$, $\overline{\mathfrak{R}_i}$ pour B, R, R_i, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}_i$ respectivement, lorsqu'il sera utile de préciser que les variables sont celles de $\overline{A}$ ou de $\overline{\mathfrak{A}}$: les générateurs V_{i0}, V_{0i}, U_{0i}, W_{0i} sont alors remplacés par les $P_{i\rho}$, $O_{i\rho}$ (**51**).

D'après le n° **51**, si ψ est irréductible, B est le p. g. c. d. de $\overline{A} = \overline{Q}$ et de $R_0(n, \pi^2)$.

B *est normal dans* A'. On le vérifie directement en transformant les générateurs de B ou de $\overline{B}$ par la substitution γ du n° **24**.

Si $p = 2$, $B = A^0$. Cela résulte des n^{os} **29** et **32** pour $n > 2$, et de la définition de B pour $n = 2$.

Soit $p > 2$ et $n > 1$. A^0, conservant a, permute les points de la quadrique $a = 1$, c'est-à-dire les s_ν solutions de $a = 1$. Si $n = 2\nu'$, $s_\nu = \pi^{2\nu'-1} - \theta\pi^{\nu'-1}$ [$\theta = 1$ si ψ est réductible ou nulle; $\theta = -1$ si ψ est irréductible (*E.*, 11)]. Si $\psi = cx^2$, $s_\nu = \pi^{2\nu} + \theta_c\pi^\nu$ (θ_z désignant le caractère quadratique de z). Le nombre des solutions où $x_1 = y_1 = 0$ est $s_{\nu-1}$.

Soit maintenant $n > 2$, ψ *étant quelconque, ou* $n = 2$ avec $\psi = 0$. m_{1c} fixe les $s_{\nu-1}$ points correspondant aux solutions où $x_1 = y_1 = 0$ et permute les $s_\nu - s_{\nu-1}$ autres par cycles de $\pi - 1$. Mais $\frac{s_\nu - s_{\nu-1}}{\pi - 1}$ est impair. *Donc l'action de* m_{1c} *sur les points de* $a = 1$ *est une substitution impaire, et celle de* m_{1,c^r} *a la parité de* r. Les V, U, W *étant d'ordre* p, *leur action est paire. Donc*

$$A^0 = B + m_{1N}B = B + m_{iN}B \qquad (i \neq 0).$$

Soit $n > 2$ *et* $\delta \neq 0$. Une substitution $m_{\nu,\sigma}$ d'ordre $\pi = \theta$ fixe les $s_{\nu 0} = \pi^{2\nu-1} - \pi^{\nu-1}$ points de $a = 1$ pour lesquels $x = y = 0$ et permute les $s_\nu - s_{\nu 0}$ autres par cycles de $\pi - \theta$. Mais $\frac{s_\nu - s_{\nu 0}}{\pi - \theta}$ est impair. *Donc l'action de* m_{ν,σ^r} *sur les points de* $a = 1$ *a la parité de* r. *Donc* $A^0 = B + m_{\nu,\sigma}B$. *En particulier* $m_{\nu,-1} = m_{0,-1}$ *est dans* B *toujours et seulement si* $\pi \equiv \theta \bmod 4$.

La substitution $t_{ik} = R_{ik1}S_{ik,-1}$ ($i, k \neq 0$) est toujours dans B. Mais quand $\psi \neq 0$, t_{0i} n'y est pas toujours. *Si* $\psi \neq 0$ *avec* $\delta c \neq 0$ (*cf.* **52**), $t_{0i}m_{i,cM}$ (δM étant carré) est dans B (**52**). Donc t_{0i} y est toujours et

seulement si δc est carré [si $c' = c$, $t_i t'_0 m_{i,b-2c}$ étant dans B (**32**), $t_i t'_0$ y est toujours et seulement si $b - 2c$ est carré]. *Si* $\psi = cx^2$, $t_{0i} m_{i,-c}$ est dans B (**32**). Donc t_{0i} y est toujours et seulement si $-c$ est carré.

De même, $m_{i,-1} T_{ik}$ étant dans B (**28**), T_{ik} y est toujours et seulement si -1 est carré. On a trouvé précédemment (**28**, **29**, **32**) l'expression par les générateurs de B de $m_{i\lambda}$, $m_{\nu\rho}$, $m_{i\lambda} m_{k\mu}$, $m_{i\lambda} m_{\nu\rho}$, T_{ik}, t_{0i}, $u_0 t_i$, $t'_0 t_i$ quand ces substitutions sont dans B. On trouvera encore au n° **40** une méthode générale pour exprimer toute substitution de B $(4, \pi)$ par les générateurs de ce groupe.

Considérons maintenant la similitude d de multiplicateur -1 que A contient toujours. *Si* $p = 2$, $d = 1$. *Si* p *est* > 2 *et* n *impair* ($\geqq 1$), d *est hors de* A^0, *et* A *est le produit direct de* A^0 *par* $D = \{d\}$.

Supposons donc $p > 2$ *et* n *pair.*

Soit $n \equiv 0 \bmod 4$. *Si* $\psi = 0$, ν est pair, et B *contient* d. *Si* ψ *est irréductible*, d *est hors de* B, car, si $\pi = 1 \bmod 4$, B ne contient pas $m_{0,-1}$ mais contient $m_{i,-1}$, quel que soit i; et si $\pi \equiv 3 \bmod 4$, B contient $m_{0,-1}$ mais ne contient pas $\Pi_1^\nu m_{i,-1}$, ν étant ici impair. *Si* ψ *est réductible et* $\delta c \neq 0$, on voit de même que B *contient* d, ce qui est évident *a priori*, puisque B est alors semblable à $B_0(n, \pi)$.

Soit $n \equiv 2 \bmod 4$ ($\geqq 2$). *Si* $\psi = 0$, ν est impair; *si alors* $\pi \equiv 1 \bmod 4$, B *contient* d; *si* $\pi \equiv 3 \bmod 4$, d *est hors de* B. *Si* ψ *est irréductible*, ν est pair; *si alors* $\pi \equiv 1 \bmod 4$, d *est hors de* B; *si* $\pi \equiv 3 \bmod 4$, B *contient* d (il contient $m_{0,-1}$ et $\Pi_1^\nu m_{i,-1}$). *Si* ψ *est réductible et* $\delta c \neq 0$, B *contient* d *toujours et seulement si* $\pi \equiv 1 \bmod 4$, ce qui est encore évident *a priori*.

Il est clair que quand d *est hors de* B, A^0 *est le produit direct de* B *par* D.

On voit que, *pour* $p > 2$ *et* n *pair* ($\geqq 2$), B *contient* d *quand* a *est équivalente à* $\Sigma_1^n z_i^2$ *et ne le contient pas quand* a *est équivalente à* $\Sigma_1^{n-1} z_i^2 + N z_n^2$ (*E.*, 44).

Toute substitution α *permutable à chaque substitution de* B *est une similitude.* On le vérifie directement à l'aide des conditions $\alpha V_{ik\lambda} = V_{ik\lambda}\alpha$, $\alpha U_{ik\lambda} = U_{ik\lambda}\alpha$, $\alpha W_{ik\lambda} = W_{ik\lambda}\alpha$ ($i, k \geqq 0$; on peut aussi employer les générateurs $P_{i\rho}$, $O_{i\rho}$ si ψ est irréductible) (*cf.* **15**).

Donc le central de A′ *est* I, *celui de* A *est* D, *et ceux de* A^0, B *sont leurs p. g. c. d. avec* D.

40 (¹). Désignons d'une manière générale par $L_{x_1 \ldots x_m}(m, \pi)$ $U_{x_1 \ldots x_m}(m, \pi)$ les groupes $L(m, \pi)$, $U(m, \pi)$ de variables $x_1, \ldots, x_m$ (*cf.* **11**), par $s_{x_1 \ldots x_m}$, $r_{x_1 \ldots x_m}$ des substitutions quelconques de $U_{x_1 \ldots x_m}$, par s_ζ, r_ζ les actions respectives de $s_{\xi\eta}$, $r_{\xi\eta}$ sur $\frac{\xi}{\eta} = \zeta$, et par $\mathfrak{v}_\zeta(2, \pi) = \Sigma s_\zeta = \Sigma r_\zeta$ le groupe $\mathfrak{v}(2, \pi)$ de variable ζ.

Supposons $\nu \geqq 2$, et soit $\mathbf{V}_{ik}(\pi) = \mathbf{V}_{ki}(\pi) = \Sigma s$ $(i, k \neq 0)$ le p. p. c. m. des $V_{ik\lambda}$, $V_{ki\lambda}$; l'action de $\mathbf{V}_{ik}$ sur x_i, x_k est $U_{x_i x_k}(2, \pi)$ (S., 83); son action sur y_i, y_k est $U_{y_i y_k}(2, \pi)$, et s est de la forme $s_{x_i x_k} \bar{s}^{-1}_{y_i y_k}$ (en désignant toujours par $\bar{\sigma}$ la transposée de σ). Soit de même $\mathbf{W}_{ik}(\pi) = \mathbf{W}_{ki}(\pi) = \Sigma r$ $(i, k \neq 0)$ le p. p. c. m. des $U_{ik\lambda}$, $W_{ik\lambda}$; l'action de $\mathbf{W}_{ik}$ sur x_i, y_k est $U_{x_i y_k}(2, \pi)$; son action sur y_i, x_k est $U_{y_i x_k}(2\pi)$, et r est de la forme $r_{x_i y_k} \bar{r}^{-1}_{y_i x_k}$.

Il résulte de ces définitions que $\mathbf{V}_{ik} = t_i \mathbf{W}_{ik} t_i = U(2, \pi)$, et que le p. g. c. d. de $\mathbf{V}_{ik}$, $\mathbf{W}_{ik}$ est $D_{ik} = \{d_{ik}\}$ (**28**).

D'ailleurs $sr = rs$ (²). On voit donc, en posant $\mathbf{V}_{ik}\mathbf{W}_{ik} = B_{ik}$ et $\frac{x_i}{x_k} = u$, $\frac{x_i}{y_k} = z$, que $B_{ik} | D_{ik}$ est isomorphe au produit direct de $\mathfrak{v}_z = \Sigma s_z$ par $\mathfrak{v}_u = \Sigma r_u$, $D_{ik} s$ répondant à s_z et $D_{ik} r$ à r_u.

Ainsi pour $n = 4$ *et* $\psi = 0$, en faisant dans ce qui précède $i = 1$, et en désignant par $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ les actions respectives de $\mathbf{V}_{12} = \mathbf{V}$ et de $\mathbf{W}_{12} = \mathbf{W}$ sur les rapports des variables, $\mathfrak{B} = \mathfrak{V}\mathfrak{W} = \mathfrak{v}_z \mathfrak{v}_u$, $V_{12\lambda}$ correspondant à $(z + \lambda)$, $V_{21\lambda}$ à $\left(\frac{z}{\lambda z + 1}\right)$, $U_{12\lambda}$ à $(u + \lambda)$, $W_{21\lambda}$ à $\left(\frac{u}{\lambda u + 1}\right)$. D'ailleurs, en faisant correspondre $m_\lambda = \begin{vmatrix} z & \lambda z \\ u & \lambda^{-1} u \end{vmatrix}$ à $m_{2\lambda}$, et $t = \begin{vmatrix} z & u \\ u & z \end{vmatrix}$ à t_2, on voit que $\mathfrak{A}^0 = \{\mathfrak{v}_z \mathfrak{v}_u, m_N\}$, et que $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{v}_z \mathfrak{v}_u, m_N, t\}$.

Si $\pi > 3$, *tout diviseur normal* X *de* A *autre que* D *et* > 1 *est* $\geqq$ B. En effet, supposons d'abord X premier à B. Si le p. g. c. d. X^0 de X, A^0 est > 1 (p est donc ici > 2), X^0 est d'ordre 2, et A^0 est le produit

(¹) *Comparer* Dickson, *Linear groups*, 196-198, 174-179.

(²) Si l'on prenait $r_{x_i y_k}$ dans $L_{x_i y_k}$ hors de $U_{x_i y_k}$ ou $s_{x_i x_k}$ dans $L_{x_i x_k}$ hors de $U_{x_i x_k}$, s ne serait plus permutable à r.

direct de B par X^0. Donc $X^0 = D$ (59), et ici D divise B. Si $X^0 = 1$, X est d'ordre 2, et A est le produit direct de A^0 par X. Donc p est > 2, et $X = D$. Supposons X non premier à B. Soit $\mathfrak{X}$ son action sur les rapports des variables, et $\mathfrak{F}$ le p. g. c. d. de $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{B}$, normal dans $\mathfrak{A}$. Si X est premier à D, $\mathfrak{F}$ est > 1. Si $\mathfrak{F}$ est $< \mathfrak{B}$, il coïncide avec $\mathfrak{V}$ ou $\mathfrak{W}$, qui, pour $\pi > 3$, sont simples et non cycliques (*E.*, 72). Or ces groupes ne sont pas normaux dans $\mathfrak{A}$. Donc $\mathfrak{F} = \mathfrak{B}$. Donc B serait le produit direct de D par $X = \mathfrak{B}$. Mais cela est impossible, car B contient des substitutions dont le carré est d, par exemple la substitution sr où $r = d$ et où $s_{x_1 x_2} = |x_2, -x_1|$. Donc X est $> D$. Donc, ici encore, $\mathfrak{F}$ est > 1. Donc $\mathfrak{F} = \mathfrak{B}$, et $X \geqq B$.

De même, si $\pi > 3$, *tout diviseur normal de* $\{B, r_1\}$ *ou de* $\{B, t_1 m_{1N}\}$ *non* $\leqq D$ *est* $\geqq B$.

Si $\pi = 2$ *ou* 3, $\mathfrak{B} = \mathfrak{V}\mathfrak{W}$ *a un diviseur normal sylowien* $\mathfrak{f}$ *abélien principal d'ordre* 9 *ou* 16 *respectivement.* $\mathfrak{B}|\mathfrak{f}$ est un g_4 carré ou un g_6 non cyclique, et aucun diviseur de $\mathfrak{f}$ ou de $\mathfrak{B}|\mathfrak{f}$ autre que 1, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{B}|\mathfrak{f}$ n'est normal dans $\mathfrak{A}$. *Si donc* F *est le diviseur* $> D$ *répondant à* $\mathfrak{f}$ *dans* B, *tout diviseur normal de* A *est* $\geqq B$, *ou est l'un des groupes* 1, D, F.

Pour $\pi \geqq 2$, *tout diviseur normal* X *de* B *est normal dans* A_0 (cela est clair pour $\pi = 2$, car alors $A^0 = B$). En effet m_1 est permutable à $\mathfrak{V}$, à $\mathfrak{W}$ et à leurs diviseurs normaux, qui sont sylowiens, si $\pi = 3$, donc aussi à l'action $\mathfrak{X}$ de X sur les rapports des variables. Si donc X n'est pas normal dans A^0, il est conjugué d'un diviseur X′ de XD. Si D divise X, $X' = X$. Si X est premier à D et si $X' \neq X$, X′ contient une substitution ξ de Xd, donc aussi d, qui est une puissance de ξ (*S.*, 83). Donc X, comme X′, contient D contre l'hypothèse.

t_{12}, qui ne rentre ni dans la forme s ni dans la forme r, est hors de **V** et de **W** et transforme $V_{12\lambda}$ en $V_{21,-\lambda}$ et $U_{12\lambda} = t_2 V_{12\lambda} t_2$ en $W_{12\lambda} = t_2 V_{21,-\lambda} t_2$. *Donc* $\{\mathbf{V}, t_{12}\}$ *et* $\{\mathbf{W}, t_{12}\}$ *sont isomorphes d'ordre* $\frac{2\pi(\pi^2-1)}{\tau}$ ($\tau = 2$ *si* $p > 2$; $\tau = 1$ *si* $p = 2$).

De même $m_{1\lambda}$ est hors de **V** et de **W**, et transforme $V_{12\mu}$ en $V_{12,\lambda\mu}$, $V_{21,-\mu}$ en $V_{21,-\lambda^{-1}\mu}$, $U_{12\mu} = t_2 V_{12\mu} t_2$ en $U_{12,\lambda\mu}$, $W_{12\mu} = t_2 V_{21,-\mu} t_2$ en $W_{12,-\lambda^{-1}\mu}$. *Donc* $\{\mathbf{V}, m_{1\lambda}\} = \mathbf{V}_\lambda$ *et* $\{\mathbf{W}, m_{1\lambda}\} = \mathbf{W}_\lambda$ *sont isomorphes d'ordre* $\frac{l\pi(\pi^2-1)}{\tau}$, l *étant l'ordre de* $m_{1\lambda}$.

On a vu (**39**) que t_{12} est toujours dans B, que $m_{12\lambda}$ y est toujours et seulement si λ est carré, et T_{12} toujours et seulement si -1 est carré [on a aussi trouvé (**28**, **29**) l'expression de ces substitutions, lorsqu'elles sont dans B, par les générateurs de B]. Mais on peut ici obtenir directement ces résultats en développant les conditions $sr = t_{12}$, $sr = m_{12\lambda}$, $sr = T_{12}$.

Comme on sait exprimer toute substitution de $U_{\xi\eta}$ par ses générateurs $|\xi + \lambda\eta, \eta|$, $|\xi, \eta + \lambda\xi|$ (*S.*, 83 ; *cf.* **50**), on saura aussi exprimer toute substitution de $B = \mathbf{VW}$ par les V_{12}, V_{21}, U_{12}, W_{12}.

Supposons de nouveau n quelconque $\geqq 4$ mais pair, et ψ irréductible. Soit, dans $\overline{A}$, $\dot{r}_s$ la substitution r de $\mathbf{W}_{i'i}(\pi^2)$ où la matrice de $r_{x_i y_{i'}}$ est conjuguée de celle de $s_{x_i x_{i'}}$ (*$\dot{r}_s$ est donc formée avec les* $U_{i'i\rho}$, $W_{i'i\rho}$ *comme s avec les* $V_{i'i\rho}$, $V_{i'i\rho}$) et $\dot{s}_r$ la substitution s de $\mathbf{V}_{i'i}(\pi^2)$ où la matrice de $s_{x_i x_{i'}}$ est conjuguée de celle de $r_{x_i y_{i'}}$. *Le groupe $\Phi_{ii'} = \Sigma s\dot{r}_s = \Sigma r\dot{s}_r$ est homomorphe à $\mathbf{V}_{ii'}(\pi^2)$, l'unité de $\Phi_{ii'}$ répondant à* $D_{ii'}$ (si $s\dot{r}_s = 1$, s et $\dot{r}_s$ sont égaux tous deux à $d_{ii'}$ ou à 1), *donc isomorphes à* $\mathfrak{O}(2, \pi^2)$.

Avec les variables x_i, y_i, $x_{i'}$, $y_{i'}$, $s\dot{r}_s$ est une substitution réelle σ, et le groupe $B_{0i}(\pi) = B_{i0}(\pi) = \Sigma\sigma = \mathfrak{O}(2, \pi^2)$ dont $\Phi_{ii'} = \overline{B}_{0i}(\pi) = \overline{B}_{i0}(\pi)$ est la forme imaginaire conserve $x_i y_i + \psi$. En prenant d'ailleurs pour s une $V_{ii'}$ ou une $V_{i'i}$ convenable de $\mathbf{V}_{ii'}(\pi^2)$ on obtient pour σ une quelconque des V_{0i}, V_{i0}, U_{0i}, W_{0i} (**51**). *Donc* $B_{0i} \equiv R_2(4, \pi)$.

Ainsi, pour $n = 4$, ψ irréductible dans Θ et $p = 2$, en faisant $i = 1$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}^0 \equiv B = \mathfrak{O}(2, \pi^2)$ [ici $A^0 = BD$ (**39**)]. *Aux substitutions* $P_{1\rho}$, $O_{1\rho}$ de $\overline{B}$ *répondent respectivement dans* $\mathfrak{O}_z(2, \pi^2)$, *par la correspondance indiquée*, $z + \rho$ *et* $\frac{z}{1 - \rho z}$. Or la $s_2(z^\pi)(-z^{-1})$ transforme ces deux dernières substitutions l'une dans l'autre. *Donc* $\mathfrak{A} = \{B, t_1\}$ *est isomorphe à* $\{\mathfrak{O}_z(2, \pi^2), z^\pi\}$, t_1 *répondant à* $(z^\pi)(-z^{-1})$, *et la correspondance des éléments de* B, $\mathfrak{O}_z$ *restant la même.*

Tout diviseur normal X *de* A *ou de* A^0 *non* $\equiv$ D *est* $\equiv$ B. En effet, si X ne contient pas B, il est premier à B qui est simple. Si X est premier à $\{B, t_1\} = B'$, X est d'ordre 2, et A produit direct de B', X, d'où $X = D$ (**39**). Si le p. g. c. d. Y de X, B' est > 1, Y est d'ordre 2, et B' produit direct de B, Y, d'où $Y = D$ (**39**); mais alors d serait dans B', donc dans Bt_1, tandis que $A = BD + BDt_1$.

On sait déjà (**59**) que $m_{1\lambda}$ est dans B toujours et seulement si λ est carré dans $\mathfrak{S}$, que $m_{2\rho}$ est dans $\overline{\mathrm{B}}$ toujours et seulement si $\rho^{\frac{\pi+1}{2}} = 1$, que t_{01} est dans B toujours et seulement si c est non carré (ou $p = 2$), que si $c' = c$, $t_1 t'_0$ y est toujours et seulement si $b - 2c$ est carré [on a, d'après (26), (29) et le n° **52**, l'expression de ces substitutions, lorsqu'elles sont dans B, par les générateurs de B]; et de là résulte que $t_{12} = m_{2q} t_{01}$ *n'est jamais dans* B. Ici encore on obtient directement ces résultats en développant les conditions $s\dot{r}_s = m_{1\lambda}$, $m_{2\rho}$, t_{01}, $t_1 t'_0$, t_{12}. Comme précédemment aussi, l'expression de chaque substitution de $\mathrm{U}_{\xi\eta}(2, \pi^2)$ par ses générateurs $|\xi + \lambda\eta, \eta|$, $|\xi, \eta + \lambda\xi|$ fournit l'expression de la substitution correspondante de $\overline{\mathrm{B}}$ par les V_{12}, V_{21}, U_{12}, W_{12}.

Dans le cas où n est quelconque ≥ 3 mais impair, et $\psi = cx^2$ ($p > 2$), je désignerai par $\mathrm{B}_{0i}(\pi) = \mathrm{B}_{i0}(\pi)$ le p. p. c. m. des $\mathrm{V}_{0i\lambda}$ et des $\mathrm{U}_{0i\lambda}$. Pour $i = 1$, $\mathrm{B}_{0i} = \mathrm{B}(3, \pi)$.

Supposons de suite $n = 3$. A conserve la conique $x_1 y_1 + cx^2 = 0$, et t_1 échange les deux points $x_1 = x = 0$, $y_1 = x = 0$ où elle est coupée par $x = 0$. Les deux droites $x_1 = zx$, $y_1 = -\frac{cx}{z}$, qui passent chacune par un de ces points, se coupent en un point de la conique caractérisé par z. Les actions respectives de $\mathrm{D}t_0$, $\mathrm{D}t_1$, $\mathrm{D}m_{1\lambda}$, $\mathrm{D}\mathrm{V}_{01\lambda}$, $\mathrm{D}\mathrm{U}_{01\lambda}$ sur z sont les substitutions $-z$, $-\frac{c}{z}$, λz, $\frac{z}{1-\lambda z}$, $z + c\lambda$ (si les actions sur z de deux substitutions α, α' de A sont σ, σ' celle de $\alpha\alpha'$ est $\sigma\sigma'$) dont le p. p. c. m. $\mathfrak{L}(2, \pi)$ (*S.*, 80) est isomorphe à $\mathrm{A}|\mathrm{D} \equiv \mathrm{A}^0$ [$\mathrm{A} = \mathrm{A}^0\mathrm{D}$ (**59**)]. L'action de $dt_1 m_{1c}^{-1} = \mathrm{U}_{01,c^{-1}} \mathrm{V}_{01} \mathrm{U}_{01,c^{-1}}$ sur z est $-z^{-1}$. Donc $\mathrm{B} \equiv \{z + 1, -z^{-1}\} = \mathfrak{V}(2, \pi)$ (*S.*, 79).

Si $\pi > 3$, tout diviseur normal X *de* A *ou de* A^0 *non* $\leq$ D *est* $\geq$ B. En effet, si X ne contient pas B, il est premier à B qui est simple. Si X est premier à A^0, A est produit direct de A^0, X, et $\mathrm{X} = \mathrm{D}$. Si le p. g. c. d. Y de X, A^0 est > 1, A^0 est produit direct de B, Y, et $\mathrm{Y} = \mathrm{D}$, tandis que d est hors de A^0 (**59**).

Si $\pi = 3$, les seuls diviseurs normaux de A *non* $\leq$ D *et non* $\geq$ B *sont le g_3 carré sylowien* F *de* B *et* FD (*dont le p. g. c. d. avec* A^0 *est* F). On le voit de suite en observant que A peut ici se représenter dans les symboles 1, 2, 3, 4, 5, 6 comme le produit direct du g_2 {56} par le

symétrique de champ 1, 2, 3, 4, A^0 correspondant à ce symétrique, et B à l'alterné de même champ.

41. D'après ce qui précède B est le p. p. c. m. des $B_i (i = 1, \ldots, \nu; j = 0, \ldots, \nu)$ en convenant que, si $\psi = 0$, $B_{i0} = B_{0i} = 1$. On peut simplifier ce résultat. Remarquons d'abord que $\{B_{il}, B_{kl}\}$ $(i, k, l \neq 0; p \geq 2)$, contenant, d'après (22) et (23), les V_{ik}, V_{ki}, U_{ik}, W_{ik}, *contient* B_{ik}. De même, d'après (25), (26), (27), $\{B_{0l}, B_{kl}\}$ $(k \neq 0; p \geq 2)$ *contient* B_{0k}, *et, si* $\psi \neq 0$, $\{B_{0k}, B_{0l}\}$ *contient* B_{kl} $(p \geq 2)$. On peut donc écrire

$$\{B_{k_1k_2}, B_{k_1k_3}, \ldots, B_{k_1k_m}\} = \{B_{k_1k_2}, B_{k_2k_3}, \ldots, B_{k_{m-1}k_m}\} = B_{k_1\ldots k_m},$$

les k_i étant distincts, et l'ordre des indices de $B_{k_1\ldots k_m}$ étant indifférent, en convenant que, si l'un d'eux est nul pour $p > 2$ et $\psi = 0$, $B_{k_1\ldots k_m} = 1$. Pour $m = \nu'$, $B_{k_1\ldots k_m} = B$.

Soit $\nu \geq 3$. D'après les relations $t_{13} V_{12\lambda} t_{13} = W_{12\lambda}$, $t_{13} V_{21\lambda} t_{13} = U_{21\lambda}$, on a $B = \{\mathbf{V}_{12}, B_{13}, \ldots, B_{1\nu}, B_{10}\}$, et, en continuant ainsi,

$$B = \{\mathbf{V}_{12}, \mathbf{V}_{13}, \ldots, \mathbf{V}_{1,\nu-1}, B_{1\nu}, B_{10}\}.$$

De même $t_{23} V_{12\lambda} t_{23} = U_{12\lambda}$, et $t_{23} V_{21\lambda} t_{23} = W_{21\lambda}$, d'où $B = \{\mathbf{V}_{12}, B_{23}, \ldots, B_{\nu-1,\nu}, B_{\nu 0}\}$, et, en continuant ainsi,

$$B = \{\mathbf{V}_{11}, \mathbf{V}_{23}, \ldots, \mathbf{V}_{\nu-2,\nu-1}, B_{\nu-1,\nu}, B_{\nu 0}\} = \{B_{01}, B_{12}, \mathbf{V}_{23}, \mathbf{V}_{34}, \ldots, \mathbf{V}_{\nu-1,\nu}\}.$$

Si B_{01} est $\neq 1$, c'est-à-dire si $\psi \neq 0$, B_{01} contient une $t_{01} m_1$ (**39**) qui transforme $\mathbf{V}_{1k}$ en $\mathbf{W}_{1k}$. *Donc si* $\psi \neq 0$, $B = \{B_{01}, \mathbf{V}_{12}, \mathbf{V}_{13}, \ldots, \mathbf{V}_{1\nu}\}$.

Comme, d'après (23), $\{\mathbf{V}_{ik}, \mathbf{V}_{il}\}$ contient $\mathbf{V}_{kl}$, l'action de $\{\mathbf{V}_{k_1k_2}, \mathbf{V}_{k_1k_3}, \ldots, \mathbf{V}_{k_1k_m}\} = \mathbf{V}_{k_1\ldots k_m}$ (l'ordre des indices de $\mathbf{V}_{k_1\ldots k_m}$ étant indifférent) sur $x_{k_1}, \ldots, x_{k_m}$ $(k_1, \ldots, k_m \neq 0)$ est $U_{r_{k_1}\ldots r_{k_m}}(m, \pi)$ (*S.*, 83), et si $s_{r_{k_1}\ldots r_{k_m}}$ est l'action d'une substitution s de $\mathbf{V}_{k_1\ldots k_m}$ sur $x_{k_1}, \ldots, x_{k_m}$, son action sur $y_{k_1}, \ldots, y_{k_m}$ est $\bar{s}^{-1}_{r_{k_1}\ldots r_{k_m}}$ (*cf.* **40**). Donc $\mathbf{V}_{k_1\ldots k_m} \equiv U(m, \pi)$, et $B = \{B_{01}, \mathbf{V}_{1\ldots\nu}\}$.

Soit i un indice fixe $\neq 0$. $\mathbf{V}_{1\ldots\nu}$ est le p. p. c. m. des $\mathbf{V}_{ik}$ où $k \neq 0, i$, et $t_i \mathbf{V}_{1\ldots\nu} t_i = \mathbf{W}^i$ celui des $\mathbf{W}_{ik}$ où $k \neq 0, i$. $\mathbf{W}^i$ est aussi isomorphe à $U(\nu, \pi)$, et son p. g. c. d. avec $\mathbf{V}_{1\ldots\nu}$ contient tous les $t_i \mathbf{V}_{kl} t_i = \mathbf{V}_{kl}$ où $k, l \neq i$, donc $\mathbf{V}_{1\ldots\nu}$.

On remarquera que $\mathbf{V}_{1\ldots\nu}$ est le p. p. c. m. de deux groupes abéliens dérivés l'un des $V_{12}, V_{13}, \ldots, V_{1\nu}$, l'autre des $V_{21}, V_{31}, \ldots, V_{\nu 1}$.

42. Soit, en supposant $n > 2$, $P_{B(n,\pi)} = P = P_0$ le $g_{\pi^{n-2}}$ abélien principal dérivé des V_{1k}, U_{1k} où $k = 2, \ldots, \nu, 0$; P_1 le $g_{\pi^{n-4}}$ analogue à P dans A_1; et formons de même successivement les groupes $P_2, \ldots$. Toute substitution de P_i est permutable à P_{i-1}, en sorte que, ν'' *étant le plus grand entier* $\leqq \frac{1}{2}(n-1)$, $PP_1 \ldots P_{\nu''-1} = \mathbf{P}_{B(n,\pi)} = \mathbf{P}$ *est un* g_{π^s} [$s = \nu'(\nu'-1)$ *si* $n = 2\nu'$; $s = \nu^2$ *si* $n = 2\nu + 1$; s *est donc le plus grand entier* $\leqq \nu''^2$] *sylowien de* B.

Écrivons un instant $U_{i,\nu+1,\lambda}$ pour $U_{i0\lambda}$, $V_{i,\nu+1,\lambda}$ pour $V_{i0\lambda}$, et ν_1, ν_2 respectivement pour les plus hautes valeurs du second indice dans les générateurs U_{ik}, V_{ik} de $\mathbf{P}$ ($\nu_1 + \nu_2 = n$), en supposant que ψ n'ait jamais la forme $c'y^2$ (ν_1 est donc $\geqq \nu_2$), désignons par $\{U_{ik}\}$ le p. p. c. m. des U_{ik} si $k < \nu_1$ ou si $k = \nu_1$ avec $\nu_1 = \nu_2 + 1$, et le p. p. c. m. des $U_{i\nu_1}$, $V_{i\nu_1}$ si $k = \nu_1$ avec $\nu_1 = \nu_2$, par $\{V_{ik}\}$ le p. p. c. m. des V_{ik}, et considérons le Tableau triangulaire

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
\{U_{12}\} & \{U_{13}\} & \ldots & \{U_{1,\nu_1-1}\} & \{U_{1\nu_1}\} & \{V_{1,\nu_1-1}\} & \ldots & \{V_{13}\} & \{V_{12}\} \\
 & \{U_{23}\} & \ldots & \{U_{2,\nu_1-1}\} & \{U_{2\nu_1}\} & \{V_{2,\nu_1-1}\} & \ldots & \{V_{23}\} & \\
 & \multicolumn{9}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\
 & & & \{U_{i,i+1}\} & \ldots & \{U_{i\nu_1}\} & \ldots & \{V_{i,i+1}\} & \\
 & & & \multicolumn{5}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} & \\
 & & & & & \{U_{\nu_1-1,\nu_1}\}. & & &
\end{array}
$$

Appelons $s^{\text{ième}}$ transversale la rangée formée du $s^{\text{ième}}$ terme de la première ligne; du $(s-2)^{\text{ième}}$ de la seconde, ..., du $[s - 2(i-1)]^{\text{ième}}$ de la $i^{\text{ième}}$. *Le* $s^{\text{ième}}$ *central* C_s *de* $\mathbf{P}$ *est le p. p. c. m. des groupes des* s *premières transversales, c'est-à-dire le p. p. c. m. des* U_{ik} *où* $i + k \leqq s + 2$ *et des* V_{ik} *où* $k - i \geqq 2\nu_1 - s - 2$. *Si* $s < \nu_1$, *ou si* $\nu_1 > \nu_2$, *l'ordre de* C_s *est* π^σ, σ *étant le plus grand entier* $\leqq \left(\frac{s+1}{2}\right)^2$. *Si* $s = \nu_1 + r$ ($r \geqq 0$) *et* $\nu_2 = \nu_1$, *l'ordre de* C_s *est* $\pi^{\sigma+r+2}$. Montrons que si le théorème est vrai pour C_s ($C_0 = 1$), il est vrai pour C_{s+1}. Soit ξ un élément de C_{s+1} hors de C_s, exprimé par les générateurs de $\mathbf{P}$ en faisant passer ceux de P_{i-1} avant ceux de P_i. Si ξ contient (dans l'expression considérée) un V_{kl} hors de C_s, $l - k$ est $\geqq 2\nu_1 - s - 3$. Or, pour $k > 1$, $V_{k-1,k}$ transforme V_{kl} en

$V_{k-1,l}V_{kl}$ si $l \leqq \nu$, et en $U_{k-1,k}V_{k-1,l}V_{kl}$ si $l = \nu + 1$. Pour que $C_s\xi$ soit permutable à $V_{k-1,k}$, il faut donc que $V_{k-1,l}$ soit dans C_s, d'où $l - k \geqq 2\nu_1 - s - 3$. Donc $l - k = 2\nu_1 - s - 3$. Pour $k = 1$ et $l < \nu_2$, la permutabilité de $C_s\xi$ avec $V_{l,l+1}$ exige que $V_{1,l+1}$ soit dans C_s, d'où encore $l - k = 2\nu_1 - s - 3$. Pour $k = 1$ et $l = \nu_2$, la permutabilité de $C_s\xi$ avec $U_{i\nu_2}$ exige que U_{1i} soit dans C_s, d'où $i + 1 \leqq s + 2$, et de même (en faisant $i = \nu_1$ si $\nu_2 = \nu_1 - 1$ et $i = \nu_1 - 1$ si $\nu_2 = \nu_1$) $l - k = 2\nu_1 - s - 3$. Si ξ contient une $U_{kl}(k < l)$ hors de C_s, $k + l$ est $\geqq s + 3$, et la permutabilité de $C_s\xi$ avec $V_{l-1,l}$ ou $U_{l-1,l}$ exige que $k + l = s + 3$. Donc ξ ne doit contenir que les générateurs de l'énoncé, et cela suffit, car alors tout générateur de **P** transforme tout générateur γ de ξ en un élément de $C_s\xi$ (si $\gamma = V_{k,\nu+1}$, un $U_{k-1,k}$ peut apparaître; mais alors $\nu_1 = \nu + 1$, $k \leqq \nu$, et $\nu + 1 - k = 2\nu_1 - s - 3$, d'où $2k - 1 \leqq s + 1$). L'ordre de C_s se calcule en comptant les éléments à prendre dans chaque ligne du Tableau, et en observant que, si $\nu_2 = \nu_1$ et $s = \nu_1 + r$, C_s contient les $V_{1\nu_1}, V_{2\nu_1}, \ldots, V_{r+2,\nu_1}$.

Les substitutions de **P** ont la forme $\alpha_{\mathbf{P}}$ indiquée au n° **15**, avec une ligne et une colonne relatives à ν si $\delta \neq 0$ (¹) et toute substitution

---

(¹) Si l'on range les variables dans l'ordre $y_1, \ldots, y_\nu, y, x, x_\nu, \ldots, x_1$ (en supprimant celles des variables x, y qui ne figurent pas dans ψ) les coefficients situés au-dessus de la diagonale principale sont tous nuls. Ceux de cette diagonale sont égaux à 1. Les $n - 1$ coefficients de la rangée parallèle à cette diagonale et située immédiatement au-dessous sont, dans l'ordre des lignes où ils se trouvent :

si $n = 2\nu$,

$$\beta'_{21}, \quad \ldots, \quad \beta'_{i,i-1}, \quad \ldots, \quad \beta'_{\nu,\nu-1}, \quad \alpha'_{\nu\nu}, \quad \alpha'_{\nu-1,\nu}, \quad \ldots, \quad \alpha_{i-1,i}, \quad \ldots, \quad \alpha_{12};$$

si $n = 2\nu + 2$,

$$\beta'_{21}, \quad \ldots, \quad \beta'_{i,i-1}, \quad \ldots, \quad \beta'_{\nu,\nu-1}, \quad \beta'_{0\nu}, \quad \alpha'_{00}, \quad \alpha_{\nu 0}, \quad \alpha_{\nu-1,\nu}, \quad \ldots, \quad \alpha_{i-1,i}, \quad \ldots, \quad \alpha_{12};$$

si $n = 2\nu + 1$,

$$\beta'_{21}, \quad \ldots, \quad \beta'_{i,i-1}, \quad \ldots, \quad \beta_{\nu,\nu-1}, \quad \alpha'_{0\nu}, \quad \alpha_{\nu 0}, \quad \alpha_{\nu-1,\nu}, \quad \ldots, \quad \alpha_{i-1,i}, \quad \ldots, \quad \alpha_{12}.$$

On a dans les trois cas $\alpha_{i-1,i} = -\beta'_{i,i-1}$ pour $i = 2, \ldots, \nu$ (**26**). De plus :

si $n = 2\nu$, $\alpha'_{\nu\nu} = 0$; si $n = 2\nu + 2$, $\alpha_{\nu 0} = -\beta'_{0\nu}$ et $\alpha'_{00} = 0$; si $n = 2\nu + 1$, $\alpha_{\nu 0} = -2c\alpha'_{0\nu}$.

Dans le cas $n = 2\nu + 1$, p impair, on peut supposer $c = \frac{1}{2}$.

de B ayant cette forme est dans $\mathbf{P}$ (*cf.* **15**). On voit encore comme au n° **15** que *le normalisant de* $\mathbf{P}$ *dans* A^0 *est* $\mathbf{M}^0\mathbf{P}$, $\mathbf{M}^0$ *désignant le p. p. c. m. (abélien) des* m_j ($j \geq 0$ *si* $\delta \neq 0$; $j \geq 1$ *si* $\psi = 0$ *ou si* $\psi = cx^2$). *L'ordre de* $\mathbf{M}^0$ *est* $(\pi - 1)^\nu(\pi - \theta)$ *si* $n = 2\nu'$ (θ *ayant le même sens qu'au n°* **27**), *et* $(\pi - 1)^\nu$ *si* $n = 2\nu + 1$. $\mathbf{M}^0$ *est son propre normalisant dans* $\mathbf{M}^0\mathbf{P}$. *Si* $p > 2$, *le p. g. c. d.* $\mathbf{M}_B$ *de* $\mathbf{M}^0$, B *est d'indice* 2 *dans* $\mathbf{M}^0 = \mathbf{M}_B + m_{1N}\mathbf{M}_B$. *Le normalisant de* $\mathbf{P}$ *dans* B *est* $\mathbf{M}_B\mathbf{P}$.

Posons $\mathbf{M} = \{\mathbf{M}^0, t_0\}$ *si* $\psi \neq 0$, *et* $\mathbf{M} = \{\mathbf{M}^0, t_\nu\}$ *si* $\psi = 0$. *Le normalisant de* $\mathbf{P}$ *dans* A *est* $\mathbf{MP}$ (*cf.* **29**). *Mais si* $p = 2$, $\mathbf{P}$ *n'est pas sylowien dans* A : *soit alors* $\mathbf{P}' = \{\mathbf{P}, t_0\}$ *si* $\delta \neq 0$, *et* $\mathbf{P}' = \{\mathbf{P}, t_\nu\}$ *si* $\psi = 0$; $\mathbf{P}'$ *est un groupe sylowien de* A *contenant* $\mathbf{P}$, *et le normalisant de* $\mathbf{P}'$ *dans* A *est encore* $\mathbf{MP} = \mathbf{M}^0\mathbf{P}'$ (le p. g. c. d. de ce normalisant avec $A^0 = B$ est évidemment le normalisant de $\mathbf{P}$ dans A^0).

45 (¹). *Pour* $p > 2$, $B(5, \pi)$ *est isomorphe au groupe simple* (**21**) $\mathcal{G}(4, \pi)$ [*pour* $p = 2$, $\mathcal{G}(4, \pi) \equiv G(4, \pi) = A(5, \pi)$ (**26**)]. Soient, en effet, ξ_1, η_1, ξ_2, η_2 les variables de $G(4, \pi)$, et ξ'_1, η'_1, ξ'_2, η'_2 des variables cogrédientes. Adjoignons aux variables de B la variable auxiliaire inaltérée y. Posons $x + y = -y_3$, $x - y = -x_3$, et identifions les variables $-x_3$, $\frac{x_2}{\gamma}$, $-\frac{x_1}{\gamma}$, y_1, y_2, y_3, γ étant une indéterminée $\neq 0$, avec les déterminants (cf. *S.*, 76) $Z_{12} = \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi'_1 \\ \eta_1 & \eta'_1 \end{vmatrix}$, $Z_{13} = \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi'_1 \\ \xi_2 & \xi'_2 \end{vmatrix}$, $Z_{14} = \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi'_1 \\ \eta_2 & \eta'_2 \end{vmatrix}$, $Z_{23} = \begin{vmatrix} \eta_1 & \eta'_1 \\ \xi_2 & \xi'_2 \end{vmatrix}$, $Z_{24} = \begin{vmatrix} \eta_1 & \eta'_1 \\ \eta_2 & \eta'_2 \end{vmatrix}$,

(¹) *Comparer* Dickson, *Linear groups*, **189**. *Ce théorème coïncide au fond avec cet autre théorème connu que les coordonnées homogènes des droites de l'espace* S_3 *à trois dimensions peuvent être regardées comme les coordonnées homogènes des points d'une quadrique* q_4 *dans l'espace à cinq dimensions* [*voir* Bertini, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi* (Pise, 1907), p. 32-39, 135-140]. En effet, l'action de $\mathcal{G}$ sur les points de S_5 est un groupe conservant q_4 et un plan correspondant à l'invariant de $\mathcal{G}$ dans S_3, donc aussi leur intersection, qui est une quadrique q_3 à cinq variables homogènes. Donc, d'après son ordre, $\mathcal{G}$ est isomorphe à $\mathfrak{B}(5, \pi) = B(5, \pi)$. Avec les notations du texte, q_3, intersection de $\Sigma_1^3 x_i y_i = 0$ et de $y = 0$, a pour équation $\Sigma_1^3 x_i y_i + x^2 = 0$.

$Z_{34} = \begin{vmatrix} \xi_2 & \xi'_2 \\ \eta_2 & \eta'_2 \end{vmatrix}$. Les générateurs $\begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \eta_1 & -\xi_1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} \xi_2 & \eta_2 \\ \eta_2 & -\xi_2 \end{vmatrix}$, $|\xi_1, \xi_1 + \lambda\eta_1|$, $|\xi_2, \xi_2 + \lambda\eta_2|$, $\begin{vmatrix} \xi_2 & \xi_2 + \lambda\xi_1 \\ \eta_1 & \eta_1 - \lambda\eta_2 \end{vmatrix}$ de G opèrent sur x_1, y_1, x_2, y_2, $x = -\frac{1}{2}(x_3 + y_3)$, $y = \frac{1}{2}(x_3 - y_3)$ les substitutions respectives $t_{12}m_{1\gamma}m_{2,-\gamma}T_{12} = S_{12,-\gamma}$, $T_{12}m_{2,-1} = R_{121}$, $U_{12,-\lambda\gamma}$, $V_{21,-\lambda}$, $V^{(\gamma)}_{01,\lambda\gamma^{-1}}$. Or $S_{12-\gamma}R_{121} = t_{12}m_{1\gamma}m_{2\gamma}$ transforme $U_{12\lambda}$ en $W_{12,\lambda\gamma^{-1}}$, $V_{21\lambda}$ en $V_{12-\lambda}$, et $V_{01\lambda}$ en $U_{01,\lambda\gamma}$ (pour n impair, $V_{10\lambda} = W_{01\lambda} = 1$). Donc, pour $\lambda = c$, le second combiné ($S.$, 75) $G_2(4, \pi)$ de $G(4, \pi)$ est isomorphe à $B(5, \pi)$ (**43**) qui a le même ordre. Or $G_2 = G|D = \mathcal{G}$ (¹). Pour $\gamma = c = 1$ (*cf.* **24**), G_2 conserve $\Sigma_1^3 x_i y_i$ ($S.$, 76), et de même B, puisque B, laissant y inaltéré, conserve $a - y^2 = \Sigma_1^3 x_i y_i$.

44. *Si $p > 2$, et $n = 2\nu + 1 > 5$, $B(n, \pi)$ et $\mathcal{G}(2\nu, \pi)$, qui ont le même ordre, ne sont pas isomorphes*, car les normalisants de leurs $g_{\pi^{\nu^2}}$ sylowiens n'ont pas le même ordre (**25**, **42**).

45 (²). *Pour $p = 2$, $R_0(6, \pi)$ est isomorphe au second combiné* ($S.$, 75) $U_2(4, \pi)$ *de* $U(4, \pi)$. En effet, x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3 étant les variables de R_0, désignons par ξ_1, η_1, ξ_2, η_2 les variables de U, et identifions, comme au n° **43** (en faisant $\gamma = 1$), $-x_3$, x_2, $-x_1$, y_1, y_2, y_3 respectivement avec Z_{12}, Z_{13}, Z_{14}, Z_{23}, Z_{24}, Z_{34}. Les générateurs $|\eta_1, \eta_1 + \lambda\eta_2|$, $|\eta_2, \eta_2 + \lambda\eta_1|$, $|\xi_2, \xi_2 - \lambda\eta_1|$, $|\eta_1, \eta_1 - \lambda\xi_2|$ de U opèrent sur les x_i, y_i les substitutions respectives $V_{34\lambda}$, $V_{43\lambda}$, $V_{23\lambda}$, $V_{32\lambda}$, que $t_{12}m_{1\gamma}m_{2\gamma}$ (*cf.* **43**) ou, ce qui revient au même, t_{12} transforme

---

(¹) Voici, d'après les n^os **6**, **19**, **28**, un Tableau un peu plus complet de la correspondance définie au texte entre les éléments de $B(5, \pi)$, $\mathcal{G}(4, \pi)$, pour $\gamma = c$:

$\mathcal{G}(4, \pi)$	$\tau_1 = u_{11}c_{1,-1}u_{11}$	$\tau_2 = u_{21}c_{2,-1}u_{21}$	$u_{1\lambda}$	$u_{2\lambda}$	$V_{21\lambda}$	$V_{12\lambda}$	$U_{12\lambda}$
$B(5, \pi)$	$S_{21c} = T_{12}t_{12}m_{1,-c}m_{2c}$	$R_{121} = T_{12}m_{2,-1}$	$U_{12,-\lambda c}$	$V_{21,-\lambda}$	$V_{01,\frac{\lambda}{c}}$	$U_{10\lambda}$	$U_{20\lambda}$

$\mathcal{G}(4, \pi)$	$W_{12\lambda}$	$c_{1\lambda}$	$c_{2\lambda}$	m_{1c}	m_{2c}	$\tau_1\tau_2$	$\tau_1\tau_2 m_{1,\frac{1}{6}} m_{2,\frac{1}{2}}$
$B(5, \pi)$	$V_{02,\frac{\lambda}{c}}$	$W_{21,\frac{\lambda}{c}}$	$V_{12,\lambda}$	$m_{1c}m_{2c}$	$m_{1c}^{-1}m_{2c}$	$t_{12}m_{1c}m_{2c}$	$t_{12}m_{1,\frac{c}{2}}m_{2,\frac{c}{12}}$

(²) *Comparer*, aux n^os **45**, **46**, Dickson, *Linear groups*, 187-188, 206-207.

respectivement en $U_{31)}$, $W_{13)}$, $W_{23)}$, $U_{32)}$. Donc, d'après les résultats déjà obtenus au n° **43**, $R_0 = U_2$.

La structure de $R_0(6, \pi)$ *est alors déterminée par la relation* $\mathfrak{V}(4, \pi) \equiv U_2 | D_2 = U | D_1$, D_1 *et* D_2 *étant des groupes cycliques de similitudes (divisant respectivement* U *et* U_2*) des ordres suivants :*

Si $\pi \equiv 1 \bmod 4$, $(D_1, 1) = 4$, $(D_2, 1) = 2$;

Si $\pi \equiv 3 \bmod 4$, $(D_1, 1) = 2$, $D_2 = 1$;

Si $p = 2$, $D_1 = D_2 = 1$.

De là résulte (**39**) *que* $\mathfrak{R}_0(6, \pi) \equiv \mathfrak{V}(4, \pi)$ (¹).

Ainsi $R_0(6, 2) = L(4, 2)$ *est isomorphe au* g^8 *alterné* (cf. *S.*, 70, 79). Pour établir une correspondance des générateurs, désignons par $a, b, c, d, e, f, g, h, i, k, l, m, n, o, p, q$ les points respectifs 0000, 1000, 0100, 0010, 0001, 1100, 1010, 1001, 0110, 0101, 0011, 1110, 1101, 1011, 0111, 1111 du champ de $L(4, 2)$, et soit $\mathfrak{A}_8$ le g^8 alterné de champ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 (²). Si l'on fait correspondre $c = 132$, $s_1 = 12.34$, $s_2 = 12.45$, $s_3 = 12.56$, $s_4 = 12.67$, $s_5 = 12.78$ de $\mathfrak{A}_8$ aux substitutions respectives

$$c' = bol.cmg.dqn.epi.fkh, \qquad s'_1 = be.cn.dp.gi.lq.mo,$$
$$s'_2 = bl.cb.dq.ep.gf.km, \qquad s'_3 = cn.dg.fk.ip.lo.mq,$$
$$s'_4 = bl.cg.dp.eq.fh.in, \qquad s'_5 = be.dq.fk.gm.io.lp$$

de $L(4, 2)$, on a une correspondance isomorphique de $\mathfrak{A}_8$ à L. Posons maintenant

$$x = 1243567 = s_4 s_3 s_1 s_2 . s_1 c s_1, \qquad x_1 = 1234567 = s_4 s_3 s_2 s_1 . c^2 \quad (^3).$$
$$y = 23.56 = c s_3 c^2, \qquad z = 18.23 = (x_1 s_1 s_2)^{-1} . s_5 . x s_1 s_2, \qquad \tau = 145.267 = y x^2,$$
$$\xi = 14.35 = x y x^{-1}, \quad \eta = 13.45 = \tau^{-1} \xi \tau, \quad \zeta = 27.68 = x^2 z x^{-2}, \quad \theta = 26.78 = \tau^{-1} \zeta \tau,$$
$$\mu = 1852.3647 = z x^4, \qquad \gamma = 12345 = s_2 s_1 c^2, \qquad \delta = 14.56 = s_1 c s_1 . s_3 . (s_1 c s_1)^{-1}.$$

(¹) *Cet isomorphisme résulte d'ailleurs immédiatement du théorème cité dans la première note du n°* **43**. Car, en regardant les coordonnées comme homogènes, les points $(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3)$ sont tous sur une quadrique conservée par $\mathfrak{V}_2(4, \pi) = \mathfrak{V}(4, \pi)$, qui est donc isomorphe à $\mathfrak{R}_0(6, \pi)$, d'après son ordre.

(²) Ces notations et celles qui vont suivre sont celles déjà employées (*S.*, **70**).

(³) La substitution correspondante de L est $x'_1 = bcoilph.dmefgnl.g$. Celle qui se trouve indiquée à l'endroit cité (*S.*, **70**, p. 92) est fautive et correspond à $s_4 s_1 s_2 s_1 . c$.

En écrivant sur une même ligne les substitutions qui se correspondent dans les isomorphismes indiquées de $R_0(6, 2)$, $L(4, 2)$, $\mathfrak{A}_8$, on a le Tableau suivant :

$R_0(6, 2)$	$L(4, 2)$	$\mathfrak{A}_8$
V_{21}	$\lvert \xi_2, \xi_2 + \eta_2 \rvert = el.ho.kp.nq.b.c.d.f.g.i.m$	$17.24.38.56 = \delta.\eta\theta\tau^{-1}\mu^3\tau.\delta$
V_{12}	$\lvert \xi_1, \xi_1 + \eta_1 \rvert = cf.im.kn.pq.b.d.e.g.h.l.o$	$12.38.47.56 = \eta\theta\tau^{-1}\mu^3\tau$
V_{13}	$\lvert \eta_2, \eta_2 + \eta_1 \rvert = ck.fn.ip.mq.b.d.e.g.h.l.o$	$15.26.34.78 = \xi\eta\theta$
V_{31}	$\lvert \eta_1, \eta_1 + \eta_2 \rvert = ek.hn.lp.oq.b.c.d.f.g.i.m$	$15.32.48.67 = x_1^{-1}.\eta\theta\tau^{-1}\mu^3\tau.x_1$
V_{23}	$\lvert \xi_2, \xi_2 + \eta_1 \rvert = ci.fm.kp.nq.b.d.e.g.h.l.o$	$14.27.35.68 = \xi\zeta$
V_{32}	$\lvert \eta_1, \eta_1 + \xi_2 \rvert = di.gm.lp.oq.b.c.e.f.h.k.n$	$18.27.36.45 = \gamma^{-3}.\eta\theta\tau^{-1}\mu^3\tau.\gamma^3$
$t_{12}T_{12}$	$\begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \eta_1 & \xi_1 \end{vmatrix} = bc.gi.hk.op.d.e.f.l.m.n.q$	$17.25.38.46 = \xi\zeta\tau\mu\tau^{-1}$
T_1	$\begin{vmatrix} \xi_2 & \eta_2 \\ \eta_2 & \xi_2 \end{vmatrix} = de.gh.ik.mn.b.c.f.l.o.p.q$	$12.38.46.57 = x^3\xi\theta x^{-3}$

Pour trouver inversement les substitutions de $R_0(6, 2)$ qui correspondent aux générateurs e, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 de $\mathfrak{A}_8$, on remarquera que les substitutions de $\mathfrak{A}_8$ répondant aux substitutions $t_{12}T_{12}.T_{12} = t_{12}$, $t_{12}V_{12}W_{12} = \mathbf{a}$, $U_{23}\mathbf{a}U_{23} = \mathbf{b}$, $V_{32}\mathbf{a}V_{32} = \mathbf{c}$, $W_{23}\mathbf{a}W_{23} = \mathbf{d}$, $T_{12}V_{23}\mathbf{a}V_{23}T_{12} = \mathbf{e}$, $V_{32}V_{13}\mathbf{a}V_{13}V_{32} = \mathbf{f}$, $\mathbf{ebe}^{-1} = \mathbf{g}$, $\mathbf{g}^{-1}\mathbf{ag} = \mathbf{h}$, $\mathbf{h}t_{12}\mathbf{h}^{-1} = \mathbf{i}$ de $R_0(6, 2)$ sont respectivement 15.27, 145, 184, 485, 354, 286, 468, 124, 215, 12.57. Aux substitutions $\mathbf{cic}^{-1} = \mathbf{k}$, $\mathbf{fkf}^{-1} = \mathbf{l}$, $\mathbf{ili} = \mathbf{m}$, $\mathbf{fmf}^{-1} = \mathbf{n}$, $\mathbf{d}^{-1}\mathbf{nd} = \mathbf{o}$, $\mathbf{o}^{-1}\mathbf{go}$ de $R_0(6, 2)$ répondent donc respectivement s_5, s_4, s_3, s_2, s_1, e de $\mathfrak{A}_8$.

La substitution t_1 de $Q_0(6, 2)$ est permutable à $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$, t_{12}. Or, la seule substitution du g^8 symétrique s_8 de champ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 qui soit permutable aux substitutions correspondantes de $\mathfrak{A}_8$ est 27. D'ailleurs 27 et t_1 *transforment de la même manière les générateurs correspondants de* $\mathfrak{A}_8$ *et de* $R_0(6, 2)$. *On a donc une correspondance isomorphique de* $Q_0(6, 2)$ *et* s_8 (¹).

Mais s_8 *n'a aucune représentation en* g^{12} *où* $\mathfrak{A}_8$ *soit représenté par* $L(4, 2)$. Car, t_1 étant permutable à V_{23}, V_{32}, U_{23}, W_{23}, $\mathbf{a}$, il devrait y avoir dans le champ de $L(4, 2)$ une s_2 permutable aux sub-

(¹) L'isomorphisme de $Q_0(6,2)$ à S_8 résulte d'ailleurs, d'après ce qui précède, de la théorie générale des automorphismes.

stitutions correspondantes : or, en essayant de la former, on arrive de suite à une impossibilité ([1]).

46. *Pour* $p = 2$, $R_2(6, \pi)$ *est isomorphe au second combiné* (*S.*, 75) $H_2^0(4, \pi)$ *de* $H^0(4, \pi)$. En effet, désignons par $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2$ les variables de H^0, et faisons les mêmes identifications qu'au n° **43**, les x_i, y_i étant ici les variables de $\overline{R}_2(6, \pi)$ [H_2^0 a donc, comme $\overline{R}_2$, l'invariant $\Sigma_1^3 x_i y_i$ (*S.*, 75)]. Comme H^0 contient $G(4, \pi)$, H_2^0 contient toutes les $V_{12\lambda}$, $V_{21\lambda}$, $U_{12\lambda}$, $W_{12\lambda}$ (**43**), donc aussi, d'après (29), t_{12}. De plus l'action du générateur $\begin{vmatrix} \xi_1 \xi_1 - \rho \xi_2 \\ \eta_2 \eta_2 + \rho \eta_1 \end{vmatrix}$ de H^0 sur les x_i, y_i est $V_{13\rho} U_{13\rho}$, dont la transformée par t_{12} est $V_{31\rho} W_{31\rho}$. Donc H_2^0 contient toutes les $V_{01\lambda}$, $V_{10\lambda}$, $U_{01\lambda}$, $W_{01\lambda}$ (**51**).

La structure de $R_2(6, \pi)$ *est alors déterminée* (**2**, **15**; *S.*, 75) *par la relation* $\mathcal{H}^0(4, \pi) \equiv H^0 | D^0 \equiv H_2^0 | D_2^0$, D^0 *et* D_2^0 *étant des groupes cycliques de similitudes* (*divisant respectivement* H^0 *et* H_2^0) *des ordres suivants :*

Si $\pi \equiv 1 \bmod 4$, $(D^0, 1) = 2$, $D_2^0 = 1$;

Si $\pi \equiv 3 \bmod 4$, $(D^0, 1) = 4$, $(D_2^0, 1) = 2$;

Si $p = 2$, $(D^0, 1) = (D_2^0, 1) = 3$.

De là résulte que $\mathcal{R}_2(6, \pi) \equiv \mathcal{H}^0(4, \pi)$.

Comme $R_2(6, 2)$ *est isomorphe à* $\mathcal{R}_0(5, 3)$ ([2]), *donc à* $\mathcal{G}(4, 3)$ (**43**), *on voit que* $\mathcal{G}(4, 3) \equiv \mathcal{H}^0(4, 2)$.

47. Supposons $n \geq 5$, et soit Γ un diviseur normal de B, A^0 A ou A′ non $= 1$.

Tout d'abord Γ contient des α qui ne sont pas des multiplications, car les conditions que α, $V_{ik\lambda}^{-1} \alpha V_{ik\lambda}$, $U_{ik\lambda}^{-1} \alpha U_{ik\lambda}$ $(i, k \geq 0)$, $t_{12} \alpha t_{12}$ [t_{12} est dans B d'après (29)] soient des multiplications donnent

---

([1]) D'ailleurs le diviseur fixant un symbole de $L(4, 2)$ est isomorphe à un g_{1344}^8 deux fois transitif (*S.*, 70, 78, 105). Au diviseur fixant un symbole de la représentation en question correspondrait donc un g_{2688}^8 deux fois transitif. Or un tel groupe n'existe pas (*S.*, 165).

([2]) *Voir* Dickson, *Linear groups*, 270-276; de Séguier, *Comptes rendus*, t. 161, 8 novembre 1915, p. 553.

(*cf.* **15**) $\alpha_{ii} = \alpha_{kk}$, $\beta'_{ii} = \beta'_{kk}$, $\alpha_{ii} = \beta'_{kk}$ $(i, k \geqq 0)$, $\alpha_{11}^{1} = \alpha_{jj}$ $(j \neq 1, 2)$, et, d'après (4), $\alpha_{ii}\beta'_{ii} = 1$, donc $\alpha = 1$ ou d.

Soit donc α une substitution de Γ autre qu'une multiplication. *On peut y supposer non nul un coefficient de second indice* $\neq 0$, *non situé dans la diagonale*. Sans cela, en effet, les équations (1)-(6) (pour j ou k nul) montrent que les α_{i0}, α'_{i0}, β_{i0}, β'_{i0} où $i \neq 0$ sont tous nuls. Et si, pour $\delta \neq 0$, α'_{00} ou β_{00} était $\neq 0$, $V_{0k\lambda}^{-1}\alpha V_{0k\lambda}$ ou $V_{k0\lambda}^{-1}\alpha V_{k0\lambda}$ a, dans l'une des deux dernières lignes et hors des deux dernières colonnes, un coefficient $\neq 0$.

En transformant maintenant α par une $m_{1,-1}^{r} T_{1k}^{r} t_{12}^{s}$ [$r, s = 0$ ou 1; une substitution de cette forme est toujours dans B (**59**)], on voit qu'on peut supposer non nul un des α_{j1}, β_{j1} autre que α_{11}. Si alors $\psi = cr^2$, l'équation (7) montre qu'un des α_{j1}, β_{j1} autres que α_{11}, α_{01} est $\neq 0$. Si $\delta \neq 0$, et si tous les α_{j1}, β_{j1} où $j > 1$ sont nuls, β_{k1} $(k > 1)$ est remplacé dans $V_{0k\lambda}^{-1}\alpha V_{0k\lambda}$ par $-\lambda(b\beta_{01} + 2c\alpha_{01})$, et dans $W_{0k\lambda}^{-1}\alpha W_{0k\lambda}$ par $-\lambda(b\alpha_{01} + 2c'\beta_{01})$, et ces deux quantités ne peuvent pas être nulles à la fois. *On peut donc supposer, quelle que soit* ψ, *qu'un des* α_{j1}, β_{j1} *autres que* α_{11}, α_{01}, β_{01} *est* $\neq 0$. En transformant au besoin par une $m_{2,-1}^{r} T_{2j}^{r} t_{23}^{s}$ ou une $m_{2,-1}^{r} T_{2j}^{r} t_{02} m_{2\lambda}$ [$r, s = 0$ ou 1, et λ étant choisi de manière que cette substitution soit dans B (**59**)], *on peut supposer* $\beta_{21} \neq 0$. *On rendra ensuite* $\beta_{11} \neq 0$, *en exceptant d'abord les cas où* $A = Q(5, \pi)$ *ou* $Q_2(6, \pi)$, par les trois opérations suivantes (*cf.* **15**) : 1° une transformation par $V_{13\lambda}$ qui, sans altérer β_{21}, rend $\beta_{23} \neq 0$ (elle remplace β_{23} par $\beta_{23} - \lambda\beta_{21}$); 2° une transformation par $U_{13\lambda}$ qui, sans altérer β_{21}, rend $\beta_{21} \neq 0$ (elle remplace β'_{21} par $\beta'_{21} + \lambda\beta_{23}$); 3° la substitution à α de $\alpha^{-1}V_{21\lambda}^{1}\alpha V_{21\lambda}$ où β_{11} est remplacé par $\beta_{11} + \lambda^2(\beta_{11}\beta'_{11} - \beta_{12}\beta'_{21})$. Si $A = Q(5, \pi)$ ou $Q_2(6, \pi)$, on rend $\beta_{11} \neq 0$ en substituant aux deux premières opérations une seule transformation par $U_{10\lambda}$ qui rend $\beta'_{21} \neq 0$ (elle remplace β'_{21} par $\beta'_{21} + \lambda\beta_{20} - c\lambda^2\beta_{21}$).

En transformant maintenant par des V_{1j}, U_{1j} on annulera tous les β_{j1}, α_{j1} où $j \neq 1$ (sans altérer β_{11}). Alors, d'après (7), $\alpha_{11} = 0$. D'après (1) et (5) $\alpha'_{11}\beta_{11} = 1$, et tous les α_{1j}, α'_{1j} où $j \neq 1$ sont nuls. Or, $|\alpha|$ étant $\neq 0$, un des déterminants à quatre éléments des colonnes de α_{11}, α'_{12} est $\neq 0$. Donc un des α'_{j2}, β'_{j2} où $j \neq 1$ est $\neq 0$. Comme tout à l'heure on peut y supposer $j \neq 0$. En transformant par une V_{i1} ou une W_{i1} on rendra $\beta'_{12} \neq 0$. En transformant alors par

des V_{1j}, U_{1j} on annulera tous les β'_{j2} où $j \neq 1$ et tous les α'_{j2} où $j \neq 1, 2$ ($|\alpha|$ étant $\neq 0$, α'_{22} sera $\neq 0$, d'après ce qu'on vient de voir). On a donc, avec les notations du n° **26**, $Y'_1 = \beta_{11} x_1$, $Y'_2 = \beta'_{12} x_1 + \alpha'_{22} y_2$, et par suite (*cf.* **15**)

$$\alpha^{-1} V_{12\lambda}^{-1} \alpha V_{12\lambda} = V_{21,\lambda} \beta_{11} \alpha'_{22} V_{12\lambda}.$$

Cette substitution étant dans $\mathbf{V}_{12}$ (**40**) hors de D_{12}, Γ contient $\mathbf{V}_{12}$.

Prenons maintenant $t_{23} \alpha t_{23}$, ou $m_{2\lambda}^{-1} t_{20} \alpha t_{20} m_{2\lambda}$ si $A = Q(5, \pi)$ ou $Q_2(6, \pi)$ [λ étant tel que $t_{20} m_{2\lambda}$ soit dans B (**39**)] pour α. Alors les α_{j1}, β_{j1} autres que β_{11} sont nuls; de même les α_{j2}, β_{j2} où $j \neq 1$, sauf β_{22}; de même les α_{1j}, α'_{1j} autres que α'_{11}. Mais β_{11}, β_{22}, α'_{11} sont $\neq 0$. Donc $Y'_1 = \beta_{11} x_1$, $Y'_2 = \beta_{12} x_1 + \beta_{22} x_2$, et l'on a

$$\alpha^{-1} U_{12\lambda}^{-1} \alpha U_{12\lambda} = W_{21,\lambda} \beta_1 \beta_{22} U_{12\lambda}.$$

Cette substitution étant dans $\mathbf{W}_{12}$ hors de D_{13}, Γ contient $\mathbf{W}_{12}$.

Donc Γ contient B_{12} (**40**) et de même chaque B_{ik} où i, k sont $\neq 0$. D'ailleurs, si $\psi \neq 0$, d'après (25), ou d'après les théorèmes des n^{os} **45-46** (*cf.* **15**, **21**), le p. g. c. d. de Γ, $\{B_{ik}, B_{i0}\}$, normal dans $\{B_{ik}, B_{i0}\}$ et contenant B_{ik}, contient B_{i0} et coïncide avec $\{B_{ik}, B_{i0}\}$. *Donc, quelle que soit* ψ, Γ *est* $\geqq B$.

Donc, pour $n \geqq 5$, *tout diviseur normal de* B, A^0, A *ou* A′ *non* $\leqq 1$ *est* $\geqq B$ (¹), *et* $\mathfrak{B} = BDD$ *est simple* (*le cas* $n = 4$ *a été traité au n°* **40**).

48. Considérons, pour $p > 2$, les trois groupes $A^0 = \{B, m_{1N}\}$, $B^1(n, \pi) = \{B, t_1\}$, $B^2(n, \pi) = \{B, t_1 m_{1N}\}$ (²), en convenant de rem-

---

(¹) On retrouve ainsi, pour $n = 5$, que D est le central de A (*cf.* **39**).

(²) Désignons généralement par (Z) l'action d'une partie Z de A sur les s points de $a = 1$ (*cf.* **39**). (B) étant pair et (m_{1N}) impaire (**39**), (B^1) a la parité de (t_1) et (B^2) la parité opposée. Or (t_1) fixe les points de $a = 1$ où $x_1 = y_1$, c'est-à-dire les s' points de $\Sigma_2^\nu x_i y_i + \psi = 1 - x_1^2$ (on calcule s' en faisant la somme des nombres de solutions répondant à chaque valeur de x_1; cf. *E.*, **44**, **45**). Donc (t_1) a la parité de $\frac{1}{2}(s - s')$. Or, en désignant toujours par θ_ξ le caractère quadratique de ξ ($\theta_0 = 1$), si n est impair ($\psi = cx^2$, $p > 2$), $s = \pi^{2\nu} + \theta_c \pi^\nu$, $s' = \pi^{2\nu-1} - \theta_c \pi^{\nu-1}$; si n est pair, $s = \pi^{2\nu'-1} - \theta\pi^{\nu'-1}$ ($\theta = 1$ si ψ est réductible ou nulle; $\theta = -1$ si ψ est irréductible; $p = 2$), et $s' = \pi^{2\nu'-2} + \theta\pi^{\nu'-1}$ si $p > 2$, $s' = \pi^{2\nu'-2}$ si $p = 2$. Pour n impair, on peut se servir de la parité de (d) au lieu de celle de (t_1), d'après les indications qui suivent dans le texte.

placer B^i par $\overline{B}^i$, R^i, $\overline{R}^i$, R^i_k ou $\overline{R}^i_k$ quand B sera remplacé par $\overline{B}$, R, $\overline{R}$, R_k ou $\overline{R}_k$.

Si n est impair, d est hors de A^0, et $A = A^0 D$ (**39**). *Donc un des* B^i *coïncide avec* BD, *et l'autre* $\{B, dm_{1N}\}$ *est premier à* D *et isomorphe à* A^0 (dm_{1N} a le même ordre que m_{1N} et transforme les substitutions de B de la même manière que m_{1N}). Or $t_{01} m_{1,c} = \tau$ est dans B (**32**). *Donc, en supposant c carré, si* $\pi \equiv 1 \bmod 4$, $d = \tau t_1 m_{1c} \Pi_2^{\nu} m_{i,-1}$ *est dans* B^1; si $\pi \equiv 3 \bmod 4$, d *est dans* B^2 *pour* ν *pair, dans* B^1 *pour* ν *impair (si c est non carré, il suffit d'échanger dans cet énoncé* B^1 *et* B^2).

Si n est pair, D divise A^0 (**39**). Comme la substitution γ du n° **24** transforme t_1 en $t_1 m_{1\rho}$, $\{m_{1\rho}\}$ étant le groupe des m_1 (même pour $n = 2$ et $\psi \neq 0$), *on voit d'abord que* $B^1 \equiv B^2$. *Mais* A^0 *n'est pas isomorphe à* B^1. Cela est clair si $n = 2$. Soit donc $n > 2$. Si D est premier à B, d est dans Bm_{1N}, donc hors de Bt_1 et de $Bt_1 m_{1N}$, donc hors de B^1 et de B^2, et comme D est le central de A, A^0 est $\not\equiv B^1$. Si D est $<$ B, les normalisants de **P** dans A^0 et dans celui des deux groupes B^1, B^2 qui contient $t_{\nu'}$ ($t_{\nu'}$ est dans Bt_1 ou dans $Bt_1 m_{1N}$) sont respectivement $\mathbf{M}^0\mathbf{P}$ et $\{\mathbf{M}_B\mathbf{P}, t_{\nu'}\}$ (**42**). Or, s'ils étaient isomorphes, $\mathbf{M}^0\mathbf{P} \mid \mathbf{P}$ le serait à $\{\mathbf{M}_B\mathbf{P}, t_{\nu'}\} \mid \mathbf{P}$, donc $\mathbf{M}^0$, qui est abélien, à $\{\mathbf{M}_B, t_{\nu'}\}$ qui ne l'est pas.

Soit par exemple $n = 4$, ψ *étant irréductible*. Alors d est hors de **B** (**39**), et $A^0 = BD$. Soient λ et ρ des éléments de $\mathfrak{S}'$ d'ordres respectifs $\pi - 1$ et $\pi + 1$. Comme $m_{2\rho}$ est dans $Bm_{1\lambda}$ (**40**), $m_{1\lambda} m_{2\rho} = m$ est dans B. En posant d'ailleurs $\alpha\dot{\alpha} = \lambda$, $\alpha\dot{\alpha}^{-1} = \rho$ (ce qui est toujours permis) et (*cf.* **40**) $r = m_{1\alpha} m_{2\alpha}$, $s_r = m_{1\dot{\alpha}} m_{2\dot{\alpha}}^{-1}$, puis $1 + \rho\sigma = \alpha$, $\alpha\rho' = -\rho$, $\sigma' = -\sigma\alpha$, on a $rs_r = m$ et

$$r = W_{12\sigma'} U_{12\rho'} W_{21\sigma} U_{12\rho}, \qquad s_r = V_{12\dot{\sigma}'} V_{12\dot{\rho}'} V_{21\sigma} V_{12\dot{\rho}}$$

[la forme réelle de m est fournie par (30), (31), (23)]. Ici **P** dérive des V_{10}, U_{10}; $\mathbf{M}_B = \{m\}$, et $t_2 m t_2 = m^{\pi}$ (¹).

(¹) On sait (*cf. S.*, **92**) que, pour $p > 2$, il y a exactement trois groupes abstraits distincts d'ordre $\pi^2(\pi^4 - 1)$, non produits directs, ayant un diviseur normal isomorphe à $\mathfrak{V}(2, \pi^2)$. Ces trois groupes sont isomorphes à $\mathfrak{L}(2, \pi^2)$, $\mathfrak{L}'(2, \pi^2) = \{\mathfrak{V}, z^{\pi}\}$, $\mathfrak{L}''(2, \pi^2) = \{\mathfrak{V}, \iota' z^{\pi}\}$, z étant la variable de $\mathfrak{V}$. Soient

V. — Sur le groupe linéaire général.

On peut étudier de la même manière que précédemment le groupe sylowien d'ordre $\pi^{\frac{n(n-1)}{2}}$ de $U(n, \pi)$ ou $L(n, \pi)$. Soient $x_1, \ldots, x_n$ les variables, et posons $\varepsilon_\lambda = |x_i, \lambda x_i|$, $u_{ik\lambda} = |x_i, x_i + \lambda x_k|$ $(i \neq k)$, les variables non écrites étant inaltérées (il sera souvent commode de supprimer le dernier indice de $u_{ik\lambda}$). On sait que U dérive des u_{ik}, et $L = \Sigma_{k=0}^{\pi-2} U \varepsilon_\mu^k$. Les u_{ik} vérifient les relations

$$u_{hi\lambda} u_{kl\mu} = u_{kl\mu} u_{hi\lambda} \qquad (i \neq k,\ h \neq l;\ k \text{ peut être égal à } h, \text{ et } l \text{ à } i),$$

$$u_{il\mu}^{-1} u_{hi\lambda} u_{il\mu} = u_{hi\lambda} u_{hl,-\lambda\mu} \qquad (h \neq l).$$

Soient P_i le $g_{\pi^{n-i+1}}$ abélien principal, p. p. c. m. des $u_{i,i+1}, \ldots, u_{in}$ $(P_0 = P)$. D'après les formules précédentes P_i est permutable à toute substitution de P_{i+k}. Donc $\mathbf{P} = PP_1 \ldots P_{n-1}$ est un $g_{\pi^{\frac{n(n-1)}{2}}}$ sylowien de U.

Désignons par $\{u_{ik}\}$ le g_π abélien principal, p. p. c. m. des $u_{ik\lambda}$, et considérons le Tableau triangulaire

$$\begin{array}{ccccc}
\{u_{1n}\} & \{u_{1,n-1}\} & \ldots & \{u_{13}\} & \{u_{12}\} \\
\{u_{2n}\} & \{u_{2,n-1}\} & \ldots & \{u_{23}\} & \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\
\{u_{n-1,n}\}. & & & &
\end{array}$$

Appelons $s^{\text{ième}}$ transversale la rangée d'éléments (parallèle à l'hypoténuse) formée des $\{u_{ik}\}$ où $k - i = n - s$. *Le $s^{\text{ième}}$ central de* $\mathbf{P}$ *est le p. p. c. m. des $\{u_{ik}\}$ figurant dans les s premières transversales.* En effet, admettons-le pour $C_0 = 1, C_1, \ldots, C_s$, et soit ξ un élément de C_{s+1} où entre le générateur u_{hi}. Pour que ξ soit permutable à u_{il} mod C_s, il faut que $i - h$ soit $\leqq n - s - 1$, et $l - h \geqq s$ quel que soit $l \geqq i + 1$. Il

---

$\mathcal{E}, \mathcal{E}', \mathcal{E}''$ les normalisants respectifs [tous d'ordre $\pi^2(\pi^2 - 1)$] d'un g_{π^2} Φ de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{L}, \mathcal{L}', \mathcal{L}''$. $\mathcal{E}]\Phi \equiv \{t'z\}$ est cyclique, $\mathcal{E}'|\Phi = \{t'^2 z, z^\pi\}$ diédral, et $\mathcal{E}''|\Phi = \{t'^2 z, tz^\pi\}$ n'est ni cyclique ni diédral [il n'a qu'un e_2 qui est $(-z)$ et n'est pas abélien]. On a ainsi démontré à nouveau, pour $p > 2$, que $B^2 \equiv \mathcal{L}'$ (*cf.* **40**).

suffit que la condition soit vérifiée pour $l = i + 1$, d'où $i - h = n - s - 1$. *L'ordre de* C_s *est évidemment* $\pi^{\frac{s(s-1)}{2}}$.

La forme générale des substitutions de P_ρ est $|x_\rho, \Sigma a_{\rho k} x_k|$, $a_{\rho k}$ étant nul pour $k < \rho$ et $a_{\rho\rho}$ égal à 1. *Donc, dans la matrice générale* $a = (a_{ik})$ *de* **P**, *les* a_{ii}, *sont égaux à* 1, *et les* a_{ik} *où* $k < i$ *sont nuls; les autres sont arbitraires.*

Soit $\alpha = (\alpha_{ik})$ une matrice permutable à **P** et $\alpha a = a' \alpha$, a étant arbitraire dans **P** et $a' = (a'_{ik})$ étant dans **P**. La comparaison des termes diagonaux de αa, $a' \alpha$ donne $\Sigma_{\rho=1}^{n} a_{i\rho} \alpha_{\rho i} = \Sigma'_{\rho=1} \alpha_{i\rho} a_{\rho i}$, d'où, pour $i = 1$, $\Sigma_2^n a_{1\rho} \alpha_{\rho 1} = 0$, et, les $a_{1\rho}$ étant arbitraires, $\alpha_{\rho 1} = 0$ pour $\rho > 1$.

Admettons que $\alpha_{\rho 1} = 0$ pour $\rho > 1$, que $\alpha_{\rho 2} = 0$ pour $\rho > 2$, ..., que $\alpha_{\rho, k-1} = 0$ pour $\rho > k - 1$. L'équation donne, pour $i = k$, $\Sigma_{k+1}^n a_{k\rho} \alpha_{\rho k} = 0$, d'où $\alpha_{\rho k} = 0$ pour $\rho > k$.

Donc, en désignant par **M** le $g_{(\pi-1)^n}$ abélien p. p. c. m. des ε_{ik}, α est dans **MP**. *Donc* **MP** = **PM**, *d'ordre* $\pi^{\frac{n(n-1)}{2}} (\pi - 1)^n$, *est le normalisant de* **P** *dans* L. *En désignant par* $\mathbf{M}^0$ *le p. g. c. d. de* **M**, U, *on a évidemment* $\mathbf{M} = \Sigma_0^{\pi-2} \mathbf{M}^0 \varepsilon_{11}^k$, *et* $\mathbf{M}^0 \mathbf{P}$, *d'ordre* $\pi^{\frac{n(n-1)}{2}} (\pi - 1)^{n-1}$ *est le normalisant de* **P** *dans* U.

NOTE.

Le cas où n est impair avec $p = 2$, écarté au n° **26**, donne lieu aux remarques suivantes :

En définissant A^0 et B comme pour n pair avec $p = 2$, on a ici, A étant simple, $B = A^0 = A$. La dernière formule du n° **32** fournit d'ailleurs l'expression de $t_k = t_{0k}$ par les générateurs de A^0.

En désignant généralement par $G_{k_1 \ldots k_\nu}(2\nu, \pi)$ ce que devient $G(2\nu, \pi)$ quand on remplace x_i par x_{k_i} et y_i par y_{k_i}, la formule (27) montre que $\{B_{0k}, B_{0l}\}$ *est ici isomorphe au produit direct de* $G_k(2, \pi) = U_{r_1 s_1}(2, \pi)$ (**20**) *par* $G_l(2, \pi)$, *donc isomorphe à* B_{kl} (**40**). Le p. g. c. d. Δ_{kl} de $\{B_{0k}, B_{0l}\}$, B_{kl} est formé des substitutions $s = s_k s_l$ (s_i étant dans B_{0i}) qui laissent x inaltéré. Or pour que s laisse x inaltéré, il faut évidemment que s_k et s_l le laissent aussi inaltéré. D'après le n° **26**, s_k est alors dans le groupe de $x_k y_k$, dérivé des m_k et de t_k. *Donc* Δ_{kl} *dérive des* m_k, *des* m_l *et de* t_{kl}. *Son ordre est* $2(\pi - 1)^2$.

L'isomorphisme de $A^0(3, \pi)$ avec $\mathcal{L}(2, \pi)$ indiqué au n° **40** subsiste pour $p = 2$, et j'ajouterai que, pour $p \geqq 2$, la substitution de $A^0(3, \pi)$ qui transforme z en $\dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ est, en posant $\alpha\delta - \beta\gamma = \Delta$ (*cf.* **32**)

$$\begin{vmatrix} x_1 & \Delta^{-1}\left(\alpha^2 x_1 \quad - \dfrac{\beta^2}{c} y_1 - 2\alpha\beta x\right) \\ y_1 & \Delta^{-1}\left(-c\gamma^2 x_1 + \delta^2 y_1 + 2c\gamma\delta x\right. \\ x & \Delta^{-1}\left[-\alpha\gamma x_1 + \dfrac{\beta\delta}{c} y_1 + (\alpha\delta + \beta\gamma)x\right] \end{vmatrix} = \begin{cases} U_{01, \frac{\beta}{c\alpha}} V_{01, -\frac{\alpha\gamma}{\Delta}} m_{1, -\frac{\Delta}{\alpha^2}} & \text{si } \alpha \neq 0, \\ t_0 m_{1, -\frac{\Delta}{c\gamma^2}} V_{01, -\frac{\gamma\delta}{\Delta}} & \text{si } \alpha = 0. \end{cases}$$

ERRATA.

Page 308, première ligne du n° **16**, *au lieu de* $\bar{a} = -a$, *lire* a gauche.

Sur une classe d'intégrales définies;

Par N.-E. Norlund,

à Lund (Suède).

[Ce Mémoire a paru dans notre *Journal* au Tome IX de la 6e série (1913), pages 77-88 auquel nous renvoyons. Mais, par suite d'un oubli, il n'a pas été mentionné dans la Table dudit Volume.]

TABLE DES MATIÈRES.

SEPTIÈME SÉRIE. — TOME II.

Les indications qui précèdent le titre de chaque Mémoire de cette Table sont celles adoptées par le Congrès international de Bibliographie des Sciences mathématiques en 1889.

(*Note de la Rédaction.*)

Pages.

[U6d] Sur quelques nouvelles figures d'équilibre d'une masse fluide en rotation; par M. *B. Globa-Mikhailenko* 1

[I13] Sur la méthode d'approximation d'Hermite; par M. *G. Humbert* 79

[I16] Sur les fractions continues ordinaires et les formes quadratiques binaires indéfinies, par M. *G. Humbert* 104

[I23] Remarques sur certaines suites d'approximation; par M. *G. Humbert* 155

[A3] Des limites des zéros d'un polynome; par M. *S.-B. Kelleher*. 169

[U3] Sur le développement des intégrales du problème des trois corps (seconde Partie); par M. *K. Bohlin* 173

[M'3] Sur les courbes gauches algébriques; par M. *R. de Montessus de Ballore* 201

Pages.

[A 4] Sur les groupes linéaires (mod p) à invariant quadratique; par M. *Camille Jordan* 253

[A 4] Sur les groupes à invariant bilinéaire ou quadratique dans un champ de Galois; par M. *J.-A. de Séguier* 281

Sur une classe d'intégrales définies; par M. *N.-E. Norlund* . 367

FIN DU TOME II DE LA SEPTIÈME SÉRIE.

56424 Paris. — Imp. GAUTHIER-VILLARS et Cie, 55, quai des Grands-Augustins.

QA
1
J684
sér.7
t.2
Physical &
Applied Sci.
Serials

Math

Journal de mathématiques
pures et appliquées

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY